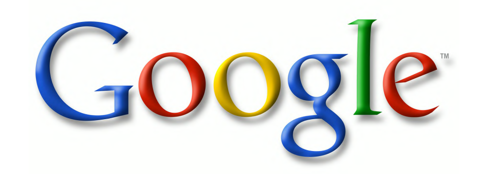


FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DER

ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS

IN GÖTTINGEN.

HERAUSGEGEBEN

VON DEM FEST-COMITEE.

INHALT:

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

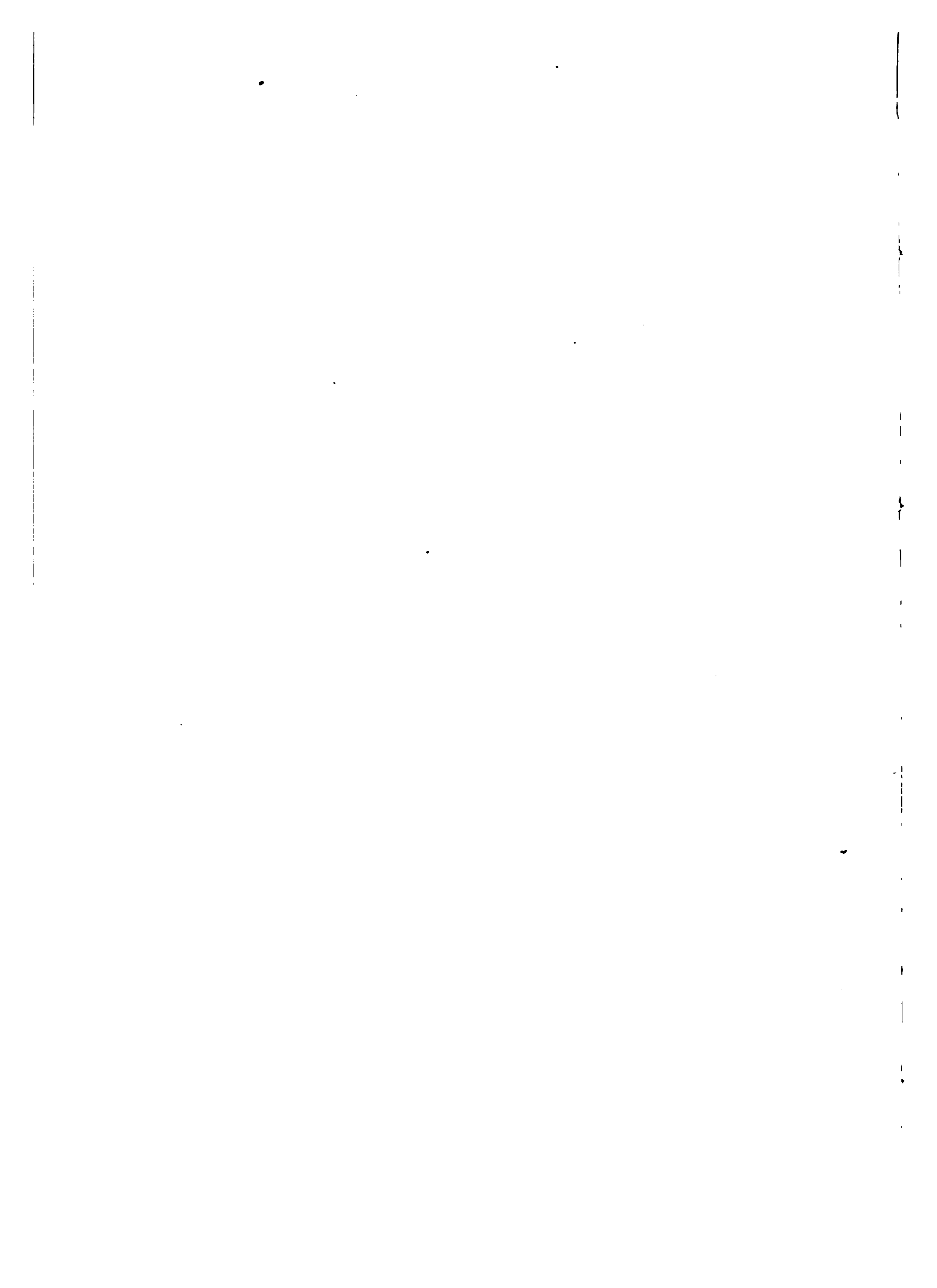
[1.]

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.



So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre 2. T. 2. Abt.

Einleitung.

Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundthatsachen. Diese Grundthatsachen heissen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit *Euklid* in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Litteratur[1]) sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein einfaches und vollständiges System von einander unabhängiger Axiome aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

---

1) Man vergleiche die zusammenfassenden und erläuternden Berichte von *G. Veronese*, „Grundzüge der Geometrie", deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1894 (Anhang), und *F. Klein*, „Zur ersten Verteilung des *Lobatschefskiy*-Preises", Math. Ann. Bd. 50.

Kapitel I.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1.

Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heissen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heissen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „congruent“, „stetig“; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundthatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I 1—7. Axiome der *Verknüpfung*,
II 1—5. Axiome der *Anordnung*,
III. Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches* Axiom),
IV 1—6. Axiome der *Congruenz*,
V. Axiom der *Stetigkeit* (*Archimedisches* Axiom).

§ 2.

Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung.

Die Axiome dieser Gruppe stellen zwischen den oben erklärten Begriffen Punkte, Geraden und Ebenen eine *Verknüpfung* her und lauten wie folgt:

I 1. *Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a; wir setzen $AB = a$ oder $BA = a$.*

Statt „bestimmen" werden wir auch andere Wendungen brauchen, z. B. A „liegt auf" a, A „ist ein Punkt von" a, a „geht durch" A „und durch" B, a „verbindet" A „und" oder „mit" B u. s. w. Wenn A auf a und ausserdem auf einer anderen Geraden b liegt, so gebrauchen wir auch die Wendung: „die Geraden" a „und" b „haben den Punkt A gemein" u. s. w.

I 2. *Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade; d. h. wenn $AB = a$ und $AC = a$, und $B \neq C$, so ist auch $BC = a$.*

I 3. *Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α; wir setzen $ABC = \alpha$.*

Wir gebrauchen auch die Wendungen: A, B, C „liegen in" α; A, B, C „sind Punkte von" α u. s. w.

I 4. *Irgend drei Punkte A, B, C einer Ebene α, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene α.*

I 5. *Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in α.*

In diesem Falle sagen wir: die Gerade a liegt in der Ebene α u. s. w.

I 6. *Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.*

I 7. *Auf jeder Geraden giebt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und im Raum giebt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

Die Axiome I 1—2 enthalten nur Aussagen über die Punkte und Geraden, d. h. über die Elemente der ebenen Geometrie und mögen daher die *ebenen Axiome der Gruppe* I heissen, zum Unterschied von den Axiomen I 3—7, die ich kurz als die *räumlichen Axiome* bezeichne.

Von den Sätzen, die aus den Axiomen I 1—7 folgen, erwähne ich nur diese beiden:

S a t z 1. Zwei Geraden einer Ebene haben einen oder keinen Punkt gemein; zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein; eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben keinen oder einen Punkt gemein.

S a t z 2. Durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt, so wie auch durch zwei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt giebt es stets eine und nur eine Ebene.

§ 3.

Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung [1]).

Die Axiome dieser Gruppe definiren den Begriff „zwischen“ und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

E r k l ä r u n g. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort *„zwischen“* dient.

A B C

Fig. 1.

II 1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*

A B C D

Fig. 2.

II 2. *Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so giebt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.*

II 3. *Unter irgend drei Punkten einer Geraden giebt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.*

II 4. *Irgend vier Punkte A, B, C, D einer Geraden können stets so angeordnet werden, dass B zwischen A und C und auch zwischen A und D und ferner C zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt.*

D e f i n i t i o n. Das System zweier Punkte A und B, die auf einer Geraden a liegen, nennen wir eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit AB oder BA. Die Punkte zwischen A und B heissen Punkte der Strecke AB oder auch *innerhalb* der Strecke AB ge-

---

1) Diese Axiome hat zuerst *M. Pasch* in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, ausführlich untersucht. Insbesondere rührt das Axiom II 5 von *M. Pasch* her.

legen; alle übrigen Punkte der Geraden a heissen *ausserhalb* der Strecke AB gelegen. Die Punkte A, B heissen *Endpunkte* der Strecke AB.

II 5. *Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt innerhalb der Strecke AB geht, so geht sie stets entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.*

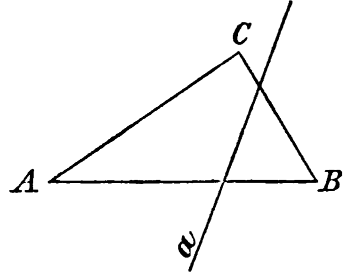


Fig. 3.

Die Axiome II 1—4 enthalten nur Aussagen über die Punkte auf einer Geraden und mögen daher die *linearen Axiome der Gruppe* II heissen; das Axiom II 5 enthält eine Aussage über die Elemente der ebenen Geometrie und heisse daher das *ebene Axiom der Gruppe* II.

§ 4.

Folgerungen aus den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung.

Zunächst leiten wir aus den linearen Axiomen II 1—4 ohne Mühe folgende Sätze ab:

Satz 3. Zwischen irgend zwei Punkten einer Geraden giebt es stets unbegrenzt viele Punkte.

Satz 4. Sind irgend eine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in einer Reihe $A, B, C, D, E, \ldots, K$ anordnen, sodass B zwischen A einerseits

A B C D E K

Fig. 4.

und $C, D, E, \ldots, K$ andererseits, ferner C zwischen A, B einerseits und $D, E, \ldots, K$ andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und $E, \ldots, K$ andererseits u. s. w. liegt. Ausser dieser Anordnung giebt es nur noch die umgekehrte Anordnung $K, \ldots, E, D, C, B, A$, die von der nämlichen Beschaffenheit ist.

Satz 5. Jede Gerade a, welche in einer Ebene α liegt, trennt die übrigen Punkte dieser Ebene α in zwei Gebiete, von folgender

Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des anderen Gebietes eine Strecke AB, innerhalb derer ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und A' ein und desselben Gebietes eine Strecke AA', welche keinen Punkt von a enthält.

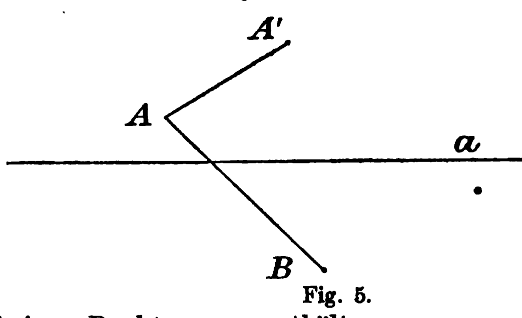


Fig. 5.

Erklärung. Es seien A, A', O, B vier Punkte einer Geraden a, so dass O zwischen A und B, aber nicht zwischen A und A' liegt; dann sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Geraden a auf ein und derselben Seite vom Punkte O*, und die Punkte A, B liegen *in der Geraden a auf verschiedenen Seiten vom Punkte O*. Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden a heissen auch ein von O ausgehender *Halbstrahl*; somit trennt jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbstrahlen.

A A' O B

Fig. 6.

Indem wir die Bezeichnungen des Satzes 5 benutzen, sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Ebene α auf ein und derselben Seite von der Geraden a* und die Punkte A, B liegen *in der Ebene α auf verschiedenen Seiten von der Geraden a.*

Definition. Ein System von Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KL$ heisst ein *Streckenzug*, der die Punkte A und L miteinander verbindet; dieser Streckenzug wird auch kurz mit $ABCD \ldots KL$ bezeichnet. Die Punkte innerhalb der Strecken $AB, BC, CD, \ldots KL$, sowie die Punkte $A, B, C, D, \ldots, K, L$ heissen insgesamt die *Punkte des Streckenzuges.* Fällt insbesondere der Punkt L mit dem Punkt A zusammen, so wird der Streckenzug ein *Polygon* genannt und als Polygon $ABCD \ldots K$ bezeichnet. Die Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KA$ heissen auch die *Seiten des Polygons.* Die Punkte $A, B, C, D, \ldots, K$ heissen die *Ecken des Polygons.* Polygone mit $3, 4, \ldots, n$ Ecken heissen bez. *Dreiecke, Vierecke, ..., n-Ecke.*

Wenn die Ecken eines Polygons sämtlich von einander verschieden sind und keine Ecke des Polygons in eine Seite fällt und endlich irgend zwei Seiten eines Polygons keinen Punkt mit einander gemein haben, so heisst das Polygon *einfach.*

Mit Zuhülfenahme des Satzes 5 gelangen wir jetzt ohne erhebliche Schwierigkeit zu folgenden Sätzen:

Satz 6. Ein jedes einfache Polygon, dessen Ecken sämtlich in einer Ebene α liegen, trennt die Punkte dieser Ebene α, die nicht dem Streckenzuge des Polygons angehören, in zwei Gebiete, ein Inneres und ein Aeusseres, von folgender Beschaffenheit: ist A ein Punkt des Inneren (innerer Punkt) und B ein Punkt des Aeusseren (äusserer Punkt), so hat jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, mindestens einen Punkt mit dem Polygon gemein; sind dagegen A, A' zwei Punkte des Inneren und B, B' zwei Punkte des Aeusseren, so giebt es stets Streckenzüge, die A mit A' und B mit B' verbinden und keinen Punkt mit dem Polygon gemein haben. Es giebt Gerade in α, die ganz im Aeusseren des Polygons verlaufen, dagegen keine solche Gerade, die ganz im Inneren des Polygons verläuft.

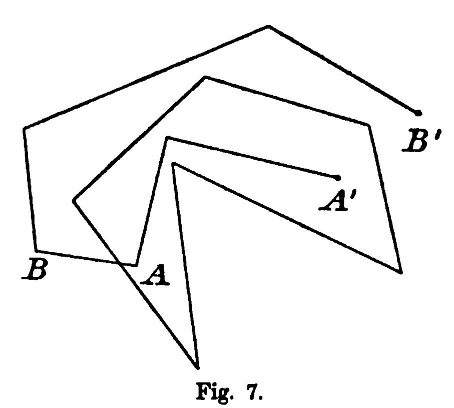


Fig. 7.

Satz 7. Jede Ebene α trennt die übrigen Punkte des Raumes in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des andern Gebietes eine Strecke AB, innerhalb derer ein Punkt von α liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und A' eines und desselben Gebietes stets eine Strecke AA', die keinen Punkt von α enthält.

Erklärung. Indem wir die Bezeichnungen dieses Satzes 7 benutzen, sagen wir: die Punkte A, A' liegen im Raume *auf ein und derselben Seite von der Ebene* α und die Punkte A, B liegen im Raume *auf verschiedenen Seiten von der Ebene* α.

Der Satz 7 bringt die wichtigsten Thatsachen betreffs der Anordnung der Elemente im Raume zum Ausdruck; diese Thatsachen sind daher lediglich Folgerungen aus den bisher behandelten Axiomen und es bedurfte in der Gruppe II keines neuen räumlichen Axioms.

§ 5.

Die Axiomgruppe III: Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom).

Die Einführung dieses Axioms vereinfacht die Grundlagen und erleichtert den Aufbau der Geometrie in erheblichem Masse; wir sprechen dasselbe wie folgt aus:

III. *In einer Ebene α lässt sich durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade a nicht schneidet; dieselbe heisst die Parallele zu a durch den Punkt A.*

Diese Fassung des Parallelenaxioms enthält zwei Aussagen; nach der ersteren giebt es in der Ebene α durch A stets eine Gerade, die a nicht trifft, und zweitens wird ausgesprochen, dass keine andere solche Gerade möglich ist.

Die zweite Aussage unseres Axioms ist die wesentliche; sie nimmt auch folgende Fassung an:

Satz 8. Wenn zwei Geraden a, b in einer Ebene eine dritte Gerade c derselben Ebene nicht treffen, so treffen sie sich auch einander nicht.

In der That hätten a, b einen Punkt A gemein, so würden durch A in derselben Ebene die beiden Geraden a, b möglich sein, die c nicht treffen; dieser Umstand widerspräche der zweiten Aussage des Parallelenaxioms in unserer ursprünglichen Fassung. Auch folgt umgekehrt aus Satz 8 die zweite Aussage des Parallelenaxioms in unserer ursprünglichen Fassung.

Das Parallelenaxiom III ist ein *ebenes Axiom.*

§ 6.

Die Axiomgruppe IV: Axiome der Congruenz.

Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Congruenz oder der Bewegung.

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort *„congruent“* dient.

IV 1. *Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB (oder BA) der Strecke A'B' congruent ist, in Zeichen:*

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets:

$$AB \equiv AB.$$

Wir sagen auch kürzer, dass eine jede Strecke auf einer gegebenen Seite einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte in eindeutig bestimmter Weise *abgetragen* werden kann.

IV 2. *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ congruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ congruent, d. h.: wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.*

IV 3. *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken*

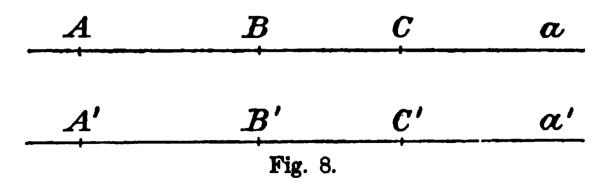


Fig. 8.

auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

Definition. Es sei α eine beliebige Ebene und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder $\sphericalangle(k, h)$. Aus den Axiomen II 1—5 kann leicht geschlossen werden, dass die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkt O die übrigen Punkte der Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit teilen: Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so giebt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O, noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h, k hindurchläuft. Eines dieser beiden Gebiete ist vor dem anderen ausgezeichnet, indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heisse das *Innere* des Winkels (h, k) zum Unterschiede von dem anderen Gebiete, welches das *Aeussere* des Winkels (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heissen *Schenkel* des Winkels und der Punkt O heisst der *Scheitel* des Winkels.

IV 4. *Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann giebt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so dass der Winkel (h, k) (oder (k, h)) congruent*

dem Winkel (h', k') *ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels* (h', k') *auf der gegebenen Seite von* a' *liegen, in Zeichen:*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

2 *Jeder Winkel ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k).$$

Wir sagen auch kurz, dass ein jeder Winkel in einer gegebenen Ebene nach einer gegebenen Seite an einen gegebenen Halbstrahl auf eine eindeutig bestimmte Weise *abgetragen* werden kann.

IV 5. *Wenn ein Winkel* (h, k) *sowohl dem Winkel* (h', k') *als auch dem Winkel* (h'', k'') *congruent ist, so ist auch der Winkel* (h', k') *dem Winkel* (h'', k'') *congruent, d. h. wenn* $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ *und* $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$ *ist, so ist auch stets* $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$.

Erklärung. Es sei ein Dreieck ABC vorgelegt; wir bezeichnen die beiden von A ausgehenden durch B und C laufenden Halbstrahlen mit h bez. k. Der Winkel (h, k) heisst dann der von den Seiten AB und AC eingeschlossene oder der der Seite BC gegenüberliegende Winkel des Dreieckes ABC; er enthält in seinem Inneren sämtliche innere Punkte des Dreieckes ABC und wird mit $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle A$ bezeichnet.

IV 6. *Wenn für zwei Dreiecke* ABC *und* $A'B'C'$ *die Congruenzen*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so sind auch stets die Congruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \text{ und } \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt.

Die Axiome IV 1—3 enthalten nur Aussagen über die Congruenz von Strecken auf Geraden; sie mögen daher die *linearen* Axiome der Gruppe IV heissen. Die Axiome IV 4, 5 enthalten Aussagen über die Congruenz von Winkeln. Das Axiom IV 6 knüpft das Band zwischen den Begriffen der Congruenz von Strecken und von Winkeln. Die Axiome IV 3—6 enthalten Aussagen über die Elemente der ebenen Geometrie und mögen daher die *ebenen* Axiome der Gruppe IV heissen.

§ 7.

Folgerungen aus den Axiomen der Congruenz.

Erklärung. Es sei die Strecke AB congruent der Strecke $A'B'$. Da nach Axiom IV 1 auch die Strecke AB congruent AB

ist, so folgt aus Axiom IV 2 $A'B'$ congruent AB; wir sagen: die beiden Strecken AB und $A'B'$ sind *unter einander congruent.*

Erklärung. Sind $A, B, C, D, \ldots, K, L$ auf a und $A', B', C', D', \ldots, K', L'$ auf a' zwei Reihen von Punkten, so dass die sämtlichen entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$, ..., KL und $K'L'$ bez. einander congruent sind, so heissen die beiden Reihen von Punkten *unter einander congruent*; A und A', B und B', ..., L und L' heissen die *entsprechenden Punkte* der congruenten Punktreihen.

Aus den linearen Axiomen IV 1—3 schliessen wir leicht folgende Sätze:

Satz 9. Ist von zwei congruenten Punktreihen $A, B, \ldots, K, L$ und $A', B', \ldots, K', L'$ die erste so geordnet, dass B zwischen A einerseits und $C, D, \ldots, K, L$ andererseits, C zwischen A, B einerseits und $D, \ldots, K, L$ andererseits, u. s. w. liegt, so sind die Punkte $A', B', \ldots, K', L'$ auf die gleiche Weise geordnet, d. h. B' liegt zwischen A' einerseits und $C', D', \ldots, K', L'$ andererseits, C' zwischen A', B' einerseits und $D', \ldots, K', L'$ andererseits u. s. w.

Erklärung. Es sei Winkel (h, k) congruent dem Winkel (h', k'). Da nach Axiom IV 4 der Winkel (h, k) congruent $\sphericalangle(h, k)$ ist, so folgt aus Axiom IV 5, dass $\sphericalangle(h', k')$ congruent $\sphericalangle(h, k)$ ist; wir sagen: die beiden Winkel (h, k) und (h', k') sind *unter einander congruent.*

Definition. Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und deren nicht gemeinsame Schenkel eine gerade Linie bilden, heissen *Nebenwinkel.* Zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel, deren Schenkel je eine Gerade bilden, heissen *Scheitelwinkel.* Ein Winkel, welcher einem seiner Nebenwinkel congruent ist, heisst ein *rechter Winkel.*

Erklärung. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heissen einander *congruent,* wenn sämtliche Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$
$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

erfüllt sind.

Satz 10 (Erster Congruenzsatz für Dreiecke). Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

gelten, so sind die beiden Dreiecke einander congruent.

Beweis. Nach Axiom IV 6 sind die Congruenzen

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \text{ und } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

erfüllt und es bedarf somit nur des Nachweises, dass die Seiten BC und $B'C'$ einander congruent sind. Nehmen wir nun im Gegenteil an, es wäre etwa BC nicht congruent $B'C'$ und bestimmen

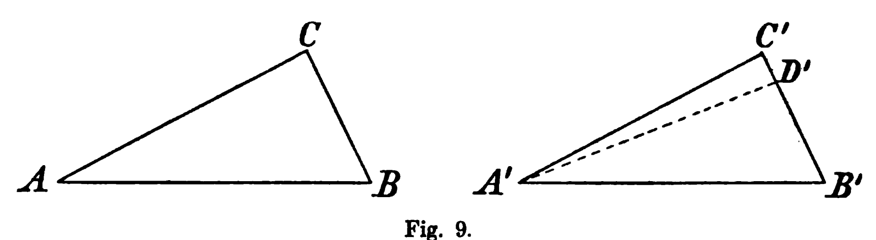


Fig. 9.

auf $B'C'$ den Punkt D', so dass $BC \equiv B'D'$ wird, so stimmen die beiden Dreiecke ABC und $A'B'D'$ in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein; nach Axiom IV 6 sind mithin insbesondere die beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'D'$ einander congruent. Nach Axiom IV 5 müssten mithin auch die beiden Winkel $\sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle B'A'D'$ einander congruent ausfallen; dies ist nicht möglich, da nach Axiom IV 4 ein jeder Winkel an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann. Damit ist der Beweis für Satz 10 vollständig erbracht.

Ebenso leicht beweisen wir die weitere Thatsache:

Satz 11 (Zweiter Congruenzsatz für Dreiecke). Wenn in zwei Dreiecken je eine Seite und die beiden anliegenden Winkel congruent ausfallen, so sind die Dreiecke stets congruent.

Wir sind nunmehr im Stande, die folgenden wichtigen Thatsachen zu beweisen:

Satz 12. *Wenn zwei Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ einander congruent sind, so sind auch ihre Nebenwinkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'B'D'$ einander congruent.*

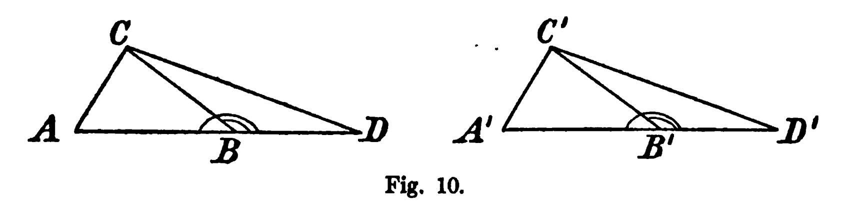


Fig. 10.

Beweis. Wir wählen die Punkte A', C', D' auf den durch B' gehenden Schenkeln derart, dass

$$A'B' \equiv AB, \quad C'B' \equiv CB, \quad D'B' \equiv DB$$

wird. In den beiden Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sind dann die Seiten AB und CB bez. den Seiten $A'B'$ und $C'B'$ congruent und, da überdies die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel nach Voraussetzung einander congruent sein sollen, so folgt nach Satz 10 die Congruenz jener Dreiecke, d. h. es gelten die Congruenzen

$$AC \equiv A'C' \text{ und } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'.$$

Da andererseits nach Axiom IV 3 die Strecken AD und $A'D'$ einander congruent sind, so folgt wiederum aus Satz 10 die Congruenz der Dreiecke CAD und $C'A'D'$, d. h. es gelten die Congruenzen

$$CD \equiv C'D' \text{ und } \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle A'D'C'$$

und hieraus folgt mittels Betrachtung der Dreiecke BCD und $B'C'D'$ nach Axiom IV 6 die Congruenz der Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'B'D'$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 12 ist der Satz von der Congruenz der Scheitelwinkel.

Satz 13. Es sei der Winkel (h, k) in der Ebene α dem Winkel (h', k') in der Ebene α' congruent und ferner sei l ein Halbstrahl der Ebene α, der vom Scheitel des Winkels (h, k) ausgeht und im Inneren dieses Winkels verläuft: dann giebt es stets einen Halbstrahl l' in der Ebene α', der vom Scheitel des Winkels

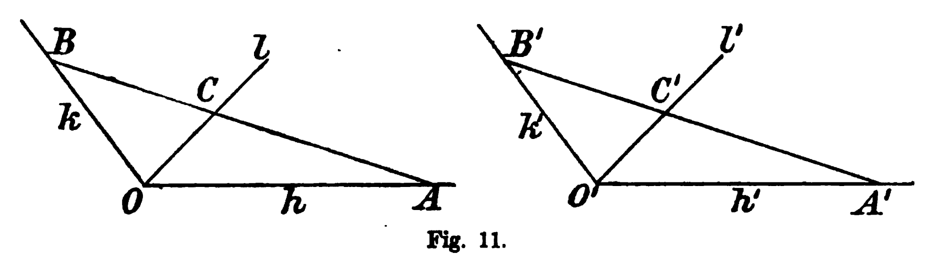


Fig. 11.

(h', k') ausgeht, und im Inneren dieses Winkels (h', k') verläuft, so dass

$$\sphericalangle (h, l) \equiv \sphericalangle (h', l') \text{ und } \sphericalangle (k, l) \equiv \sphericalangle (k', l')$$

wird.

Beweis. Wir bezeichnen die Scheitel der Winkel (h, k) und (h', k') bez. mit O, O' und bestimmen dann auf den Schenkeln h, k, h', k' die Punkte A, B, A', B' derart, dass die Congruenzen

$$OA \equiv O'A' \text{ und } OB \equiv O'B'$$

erfüllt sind. Wegen der Congruenz der Dreiecke OAB und $O'A'B'$ wird

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle O'A'B', \quad \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle O'B'A'.$$

Die Gerade AB schneide l in C; bestimmen wir dann auf der Strecke $A'B'$ den Punkt C', so dass $A'C' \equiv AC$ wird, so ist $O'C'$ der gesuchte Halbstrahl l'. In der That, aus $AC \equiv A'C'$ und $AB \equiv A'B'$ kann mittelst Axiom IV 3 leicht die Congruenz $BC \equiv B'C'$ geschlossen werden; nunmehr erweisen sich die Dreiecke OAC und $O'A'C'$, sowie ferner die Dreiecke OBC und $O'B'C'$ unter einander congruent; hieraus ergeben sich die Behauptungen des Satzes 13.

Auf ähnliche Art gelangen wir zu folgender Thatsache:

Satz 14. Es seien einerseits h, k, l und andererseits h', k', l' je drei von einem Punkte ausgehende und je in einer Ebene gelegene Halbstrahlen: wenn dann die Congruenzen

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \text{ und } \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$$

erfüllt sind, so ist stets auch

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Auf Grund der Sätze 12 und 13 gelingt der Nachweis des folgenden einfachen Satzes, den *Euklid* — meiner Meinung nach mit Unrecht — unter die Axiome gestellt hat:

Satz 15. *Alle rechten Winkel sind einander congruent.*

Beweis: Der Winkel BAD sei seinem Nebenwinkel CAD congruent und desgleichen sei der Winkel $B'A'D'$ seinem Nebenwinkel $C'A'D'$ congruent; es sind dann $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle B'A'D'$, $\sphericalangle C'A'D'$ sämtlich rechte Winkel. Wir nehmen im Gegensatz zu unserer Behauptung an, es wäre der rechte Winkel $B'A'D'$ nicht congruent dem rechten Winkel BAD und tragen dann $\sphericalangle B'A'D'$

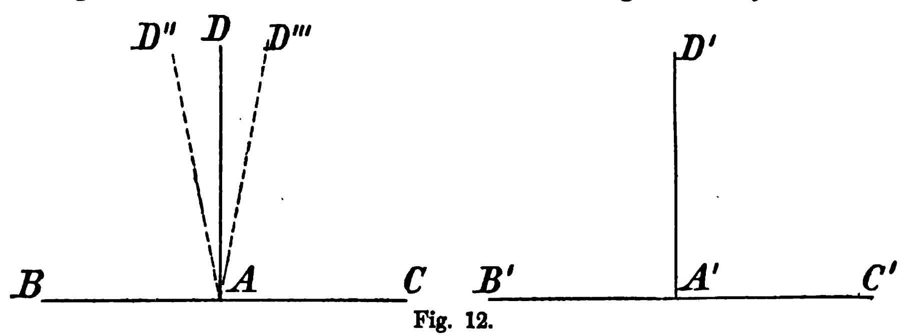


Fig. 12.

an den Halbstrahl AB an, so dass der entstehende Schenkel AD'' entweder in das Innere des Winkels BAD oder des Winkels CAD

fällt; es treffe etwa die erstere Möglichkeit zu. Wegen der Congruenz der Winkel $B'A'D'$ und BAD'' folgt nach Satz 12, dass auch der Winkel $C'A'D'$ dem Winkel CAD'' congruent ist, und da die Winkel $B'A'D'$ und $C'A'D'$ einander congruent sein sollen, so lehrt Axiom IV 5, dass auch der Winkel BAD'' dem Winkel CAD'' congruent sein muss. Da ferner $\sphericalangle BAD$ congruent $\sphericalangle CAD$ ist, so können wir nach Satz 13 innerhalb des Winkels CAD einen von A ausgehenden Halbstrahl AD''' finden, so dass $\sphericalangle BAD''$ congruent $\sphericalangle CAD'''$ und zugleich $\sphericalangle DAD''$ congruent $\sphericalangle DAD'''$ wird. Nun war aber $\sphericalangle BAD''$ congruent $\sphericalangle CAD''$ und somit müsste nach Axiom IV 5 auch $\sphericalangle CAD''$ congruent $\sphericalangle CAD'''$ sein; das ist nicht möglich, weil nach Axiom IV 4 ein jeder Winkel an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann; hiermit ist der Beweis für Satz 15 erbracht.

Wir können jetzt die Bezeichnungen „*spitzer Winkel*“ und „*stumpfer Winkel*“ in bekannter Weise einführen.

Der Satz von der Congruenz der Basiswinkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ im gleichschenkligen Dreiecke ABC folgt unmittelbar durch Anwendung des Axioms IV 6 auf Dreieck ABC und Dreieck BAC. Mit Hülfe dieses Satzes und unter Hinzuziehung des Satzes 14 beweisen wir dann leicht in bekannter Weise die folgende Thatsache:

Satz 16 (Dritter Congruenzsatz für Dreiecke). Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten entsprechend congruent ausfallen, so sind die Dreiecke congruent.

Erklärung. Irgend eine endliche Anzahl von Punkten heisst eine *Figur*; liegen alle Punkte der Figur in einer Ebene, so heisst sie eine *ebene Figur*.

Zwei Figuren heissen *congruent*, wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, dass die auf diese Weise einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich einander congruent sind.

Congruente Figuren haben, wie man aus den Sätzen 12 und 9 erkennt, folgende Eigenschaften: Drei Punkte einer Geraden liegen auch in jeder congruenten Figur auf einer Geraden. Die Anordnung der Punkte in entsprechenden Ebenen in Bezug auf entsprechende Gerade ist in congruenten Figuren die nämliche; das Gleiche gilt von der Reihenfolge entsprechender Punkte in entsprechenden Geraden.

Der allgemeinste Congruenzsatz für die Ebene und für den Raum drückt sich, wie folgt, aus:

Satz 17. Wenn $(A, B, C, \ldots)$ und $(A', B', C', \ldots)$ congruente ebene Figuren sind und P einen Punkt in der Ebene der ersten bedeutet, so lässt sich in der Ebene der zweiten Figur stets ein Punkt P' finden derart, dass $(A, B, C, \ldots, P)$ und $(A', B', C', \ldots, P')$ wieder congruente Figuren sind. Enthalten die beiden Figuren wenigstens drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte, so ist die Construction von P' nur auf eine Weise möglich.

Satz 18. Wenn $(A, B, C, \ldots)$ und $(A', B', C', \ldots)$ congruente Figuren sind und P einen beliebigen Punkt bedeutet, so lässt sich stets ein Punkt P' finden, so dass die Figuren $(A, B, C, \ldots, P)$ und $(A', B', C', \ldots, P')$ congruent sind. Enthält die Figur $(A, B, C \ldots)$ mindestens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte, so ist die Construction von P' nur auf eine Weise möglich.

Dieser Satz enthält das wichtige Resultat, dass die sämtlichen räumlichen Thatsachen der Congruenz, d. h. der Bewegung im Raume — mit Hinzuziehung der Axiomgruppen I und II — lediglich Folgerungen aus den sechs oben aufgestellten linearen und ebenen Axiomen der Congruenz sind, also das Parallelenaxiom zu ihrer Feststellung nicht notwendig ist.

Nehmen wir zu den Congruenzaxiomen noch das Parallelenaxiom III hinzu, so gelangen wir leicht zu den bekannten Thatsachen:

Satz 19. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel und Wechselwinkel congruent, und umgekehrt: die Congruenz der Gegen- und Wechselwinkel hat zur Folge, dass die Geraden parallel sind.

Satz 20. Die Winkel eines Dreiecks machen zusammen zwei Rechte aus.

Definition. Wenn M ein beliebiger Punkt in einer Ebene α ist, so heisst die Gesamtheit aller Punkte A, für welche die Strecken MA einander congruent sind, ein *Kreis*; M heisst der *Mittelpunkt des Kreises.*

Auf Grund dieser Definition folgen mit Hülfe der Axiomgruppen III—IV leicht die bekannten Sätze über den Kreis, insbesondere die Möglichkeit der Konstruktion eines Kreises durch irgend drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte sowie der Satz über die Congruenz aller Peripheriewinkel über der nämlichen Sehne und der Satz von den Winkeln im Kreisviereck.

§ 8.

Die Axiomgruppe V: Axiom der Stetigkeit (Archimedisches Axiom).

Dieses Axiom ermöglicht die Einführung des Stetigkeitsbegriffes in die Geometrie; um dasselbe auszusprechen, müssen wir zuvor eine Festsetzung über die Gleichheit zweier Strecken auf einer Geraden treffen. Zu dem Zwecke können wir entweder die Axiome über Streckencongruenz zu Grunde legen und dementsprechend congruente Strecken als „gleiche“ bezeichnen oder auf Grund der Axiomgruppen I—II durch geeignete Constructionen (vgl. Kap. V § 24) festsetzen, wie eine Strecke von einem Punkte einer gegebenen Geraden abzutragen ist, so dass eine bestimmte neue ihr „gleiche“ Strecke entsteht. Nach einer solchen Festsetzung lautet das Archimedische Axiom, wie folgt:

V. *Es sei* A_1 *ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten* A *und* B; *man construire dann die Punkte* $A_2, A_3, A_4, \ldots$, *so dass* A_1 *zwischen* A *und* A_2, *ferner* A_2 *zwischen* A_1 *und* A_3, *ferner* A_3 *zwischen* A_2 *und* A_4 *u. s. w. liegt und überdies die Strecken*

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4, \ldots$$

$A \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \qquad\qquad A_{n-1}\ B\ A_n$

Fig. 18.

einander gleich sind: dann giebt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ *stets einen solchen Punkt* A_n, *dass* B *zwischen* A *und* A_n *liegt.*

Das Archimedische Axiom ist ein *lineares* Axiom.

Kapitel II.

Die Widerspruchslosigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome.

§ 9.

Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

Die Axiome der fünf in Kapitel I aufgestellten Axiomgruppen stehen mit einander nicht in Widerspruch, d. h. es ist nicht möglich, durch logische Schlüsse aus denselben eine Thatsache abzuleiten, welche einem der aufgestellten Axiome widerspricht. Um

dies einzusehen, genügt es, eine Geometrie anzugeben, in der sämtliche Axiome der fünf Gruppen erfüllt sind.

Man betrachte den Bereich Ω aller derjenigen algebraischen Zahlen, welche hervorgehen, indem man von der Zahl 1 ausgeht und eine endliche Anzahl von Malen die vier Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ anwendet, wobei ω jedesmal eine Zahl bedeuten kann, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist.

Wir denken uns ein Paar von Zahlen (x, y) des Bereiches Ω als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u:v:w)$ aus Ω, falls u, v nicht beide Null sind, als eine Gerade; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux+vy+w = 0$$

ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der Geraden $(u:v:w)$ liegt; damit sind, wie man leicht sieht, die Axiome I 1—2 und III erfüllt. Die Zahlen des Bereiches Ω sind sämtlich reell; indem wir berücksichtigen, dass dieselben sich ihrer Grösse nach anordnen lassen, können wir leicht solche Festsetzungen für unsere Punkte und Geraden treffen, dass auch die Axiome II der Anordnung sämtlich gültig sind. In der That, sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... irgend welche Punkte auf einer Geraden, so möge dies ihre Reihenfolge auf der Geraden sein, wenn die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder $y_1, y_2, y_3, \ldots$ in dieser Reihenfolge entweder beständig abnehmen oder wachsen; um ferner die Forderung des Axioms II 5 zu erfüllen, haben wir nur nöthig festzusetzen, dass alle Punkte (x, y), für die $ux+vy+w$ kleiner oder grösser als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen Seite der Geraden $(u:v:w)$ gelegen sein sollen. Man überzeugt sich leicht, dass diese Festsetzung sich mit der vorigen Festsetzung in Uebereinstimmung befindet, derzufolge ja die Reihenfolge der Punkte auf einer Geraden bereits bestimmt ist.

Das Abtragen von Strecken und Winkeln erfolgt nach den bekannten Methoden der analytischen Geometrie. Eine Transformation von der Gestalt

$$x' = x+a,$$
$$y' = y+b$$

vermittelt die Parallelverschiebung von Strecken und Winkeln. Wird ferner der Punkt (0, 0) mit O, der Punkt (1, 0) mit E und ein beliebiger Punkt (a, b) mit C bezeichnet, so entsteht durch Drehung um den Winkel $\sphericalangle COE$, wenn O der feste Drehpunkt

ist, aus dem beliebigen Punkte (x, y) der Punkt (x', y'), wobei

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

zu setzen ist. Da die Zahl

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

wiederum dem Bereiche Ω angehört, so gelten bei unseren Festsetzungen auch die Congruenzaxiome IV und offenbar ist auch das Archimedische Axiom V erfüllt.

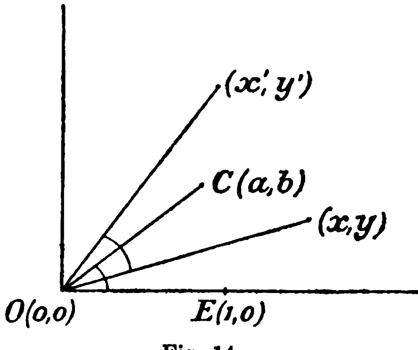


Fig. 14.

Wir schliessen hieraus, dass jeder Widerspruch in den Folgerungen aus unseren Axiomen auch in der Arithmetik des Bereiches Ω erkennbar sein müsste.

Die entsprechende Betrachtungsweise für die räumliche Geometrie bietet keine Schwierigkeit.

Wählen wir in der obigen Entwickelung statt des Bereiches Ω den Bereich aller reellen Zahlen, so erhalten wir ebenfalls eine Geometrie, in der sämtliche Axiome I—V gültig sind. Für unseren Beweis genügte die Zuhülfenahme des Bereiches Ω, der nur eine abzählbare Menge von Elementen enthält.

§ 10.

Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms (Nicht-Euklidische Geometrie).

Nachdem wir die Widerspruchslosigkeit der Axiome erkannt haben, ist es von Interesse zu untersuchen, ob sie sämtlich von einander unabhängig sind. In der That zeigt sich, dass keines der Axiome durch logische Schlüsse aus den übrigen abgeleitet werden kann.

Was zunächst die einzelnen Axiome der Gruppen I, II und IV betrifft, so ist der Nachweis dafür leicht zu führen, dass die Axiome ein und derselben Gruppe je unter sich unabhängig sind[1]).

---

1) Vergl. meine Vorlesung über Euklidische Geometrie (Wintersemester 1898/99), die nach einer Ausarbeitung des Herrn Dr. *von Schaper* für meine Zuhörer autographirt worden ist.

Die Axiome der Gruppen I und II liegen bei unserer Darstellung den übrigen Axiomen zu Grunde, so dass es sich nur noch darum handelt, für jede der Gruppen III, IV und V die Unabhängigkeit von den übrigen nachzuweisen.

Die erstere Aussage des Parallelenaxioms kann aus den Axiomen der Gruppen I, II, IV bewiesen werden. Um dies einzusehen, verbinden wir den gegebenen Punkt A mit einem beliebigen Punkte B der Geraden a. Es sei ferner C irgend ein anderer Punkt der Geraden a; dann tragen wir $\sphericalangle ABC$ an AB im Punkte A nach derjenigen Seite in der nämlichen Ebene α an, auf der nicht der Punkt C liegt. Die so erhaltene Gerade durch A trifft die Gerade a nicht. In der That, schnitte sie a im Punkte D und nehmen wir etwa an, dass B zwischen C und D liege, so könnten wir auf a einen Punkt D' finden, so dass B zwischen D und D' liegt und überdies

$$AD \equiv BD'$$

ausfiele. Wegen der Congruenz der Dreiecke ABD und BAD' würde die Congruenz

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BAD'$$

folgen und da die Winkel ABD' und ABD Nebenwinkel sind, so müssten sich dann mit Rücksicht auf Satz 12 auch die Winkel BAD und BAD' als Nebenwinkel erweisen; dies ist aber wegen Satz 1 nicht der Fall.

Die zweite Aussage des Parallelenaxioms III ist von den übrigen Axiomen unabhängig; dies zeigt man in bekannter Weise am einfachsten wie folgt. Man wähle die Punkte, Geraden und Ebenen der gewöhnlichen in § 9 construirten Geometrie, so weit sie innerhalb einer festen Kugel verlaufen, für sich allein als Elemente einer räumlichen Geometrie und vermittle die Congruenzen dieser Geometrie durch solche lineare Transformationen der gewöhnlichen Geometrie, welche die feste Kugel in sich überführen. Bei geeigneten Festsetzungen erkennt man, dass in dieser „*Nicht-Euklidischen*“ *Geometrie* sämtliche Axiome ausser dem Euklidischen Axiom III gültig sind und da die Möglichkeit der gewöhnlichen Geometrie in § 9 nachgewiesen worden ist, so folgt nunmehr auch die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie.

§ 11.

Die Unabhängigkeit der Congruenzaxiome.

Wir werden die Unabhängigkeit der Congruenzaxiome erkennen, indem wir den Nachweis führen, dass das Axiom IV 6 oder, was auf das nämliche hinausläuft, der erste Congruenzsatz für Dreiecke, d. i. Satz 10 durch logische Schlüsse nicht aus den übrigen Axiomen I, II, III, IV 1—5, V abgeleitet werden kann.

Wir wählen die Punkte, Geraden, Ebenen der gewöhnlichen Geometrie auch als Elemente der neuen räumlichen Geometrie und definiren das Abtragen der Winkel ebenfalls wie in der gewöhnlichen Geometrie, etwa in der Weise, wie in § 9 auseinandergesetzt worden ist; dagegen definiren wir das Abtragen der Strecken auf andere Art. Die zwei Punkte A_1, A_2 mögen in der gewöhnlichen Geometrie die Coordinaten x_1, y_1, z_1 bez. x_2, y_2, z_2 haben; dann bezeichnen wir den positiven Wert von

$$\sqrt{(x_1-x_2+y_1-y_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

als die Länge der Strecke A_1A_2 und nun sollen zwei beliebige Strecken A_1A_2 und $A_1'A_2'$ einander congruent heissen, wenn sie im eben festgesetzten Sinne gleiche Längen haben.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass in der so hergestellten räumlichen Geometrie die Axiome I, II, III, IV 1—2, 4—5, V gültig sind.

Um zu zeigen, dass auch das Axiom IV 3 erfüllt ist, wählen wir eine beliebige Gerade a und auf ihr drei Punkte A_1, A_2, A_3, sodass A_2 zwischen A_1 und A_3 liegt. Die Punkte x, y, z der Geraden a seien durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \lambda t+\lambda', \\ y &= \mu t+\mu', \\ z &= \nu t+\nu' \end{aligned}$$

gegeben, worin $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ gewisse Constante und t einen Parameter bedeutet. Sind t_1, $t_2\,(<t_1)$, $t_3\,(<t_2)$ die Parameterwerte, die den Punkten A_1, A_2, A_3 entsprechen, so finden wir für die Längen der drei Strecken A_1A_2, A_2A_3 und A_1A_3 bez. die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} &(t_1-t_2)\,\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\right|, \\ &(t_2-t_3)\,\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\right|, \\ &(t_1-t_3)\,\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2}\right| \end{aligned}$$

und mithin ist die Summe der Längen der Strecken A_1A_2 und

$A_2 A_3$ gleich der Länge der Strecke $A_1 A_3$; dieser Umstand bedingt die Gültigkeit des Axioms IV 3.

Das Axiom IV 6 oder vielmehr der erste Congruenzsatz für Dreiecke ist in unserer Geometrie nicht immer erfüllt. Betrachten wir nämlich in der Ebene $z = 0$ die vier Punkte

O mit den Coordinaten $x = 0,\ y = 0,$
A „ „ „ $x = 1,\ y = 0,$
B „ „ „ $x = 0,\ y = 1,$
C „ „ „ $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},$

so sind in den beiden (rechtwinkligen) Dreiecken OAC und OBC die Winkel bei C und die anliegenden Seiten entsprechend congruent, da die Seite OC beiden Dreiecken gemeinsam ist und die Strecken AC und BC die gleiche Länge $\frac{1}{2}$ besitzen. Dagegen haben die dritten Seiten OA und OB die Länge 1, bez. $\sqrt{2}$ und sind daher nicht einander congruent.

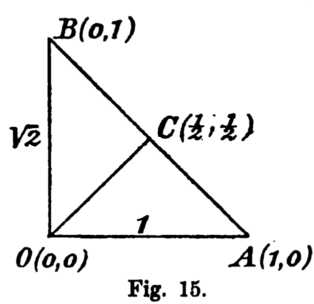


Fig. 15.

Es ist auch nicht schwer, in dieser Geometrie zwei Dreiecke zu finden, für welche das Axiom IV 6 selbst nicht erfüllt ist.

§ 12.

Die Unabhängigkeit des Stetigkeitsaxioms V (Nicht-Archimedische Geometrie).

Um die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms V zu beweisen, müssen wir eine Geometrie herstellen, in der sämtliche Axiome mit Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind[1].

Zu dem Zwecke construiren wir den Bereich $\Omega(t)$ aller derjenigen algebraischen Funktionen von t, welche aus t durch die vier Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und durch die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ hervorgehen; dabei soll ω irgend eine Funktion bedeuten, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. Die Menge der Elemente von $\Omega(t)$ ist — ebenso wie von Ω — eine abzählbare. Die fünf Operationen sind sämtlich eindeutig und reell ausführbar;

1) *G. Veronese* hat in seinem tiefsinnigen Werke, Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ebenfalls den Versuch gemacht, eine Geometrie aufzubauen, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist.

der Bereich $\Omega(t)$ enthält daher nur eindeutige und reelle Funktionen von t.

Es sei c irgend eine Funktion des Bereiches $\Omega(t)$; da die Funktion c eine algebraische Funktion von t ist, so kann sie jedenfalls nur für eine endliche Anzahl von Werten t verschwinden und es wird daher die Funktion c für genügend grosse positive Werte von t entweder stets positiv oder stets negativ ausfallen.

Wir sehen jetzt die Funktionen des Bereiches $\Omega(t)$ als eine Art complexer Zahlen an; offenbar sind in dem so definirten complexen Zahlensystem die gewöhnlichen Rechnungsregeln sämtlich gültig. Ferner möge, wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen dieses complexen Zahlensystems sind, die Zahl a grösser oder kleiner als b, in Zeichen: $a > b$ oder $a < b$, heissen, je nachdem die Differenz $c = a - b$ als Funktion von t für genügend grosse positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt. Bei dieser Festsetzung ist für die Zahlen unseres complexen Zahlensystems eine Anordnung ihrer Grösse nach möglich, die von der gewöhnlichen Art wie bei reellen Zahlen ist; auch gelten, wie man leicht erkennt, für unsere complexen Zahlen die Sätze, wonach Ungleichungen richtig bleiben, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Zahl addirt oder beide Seiten mit der gleichen Zahl > 0 multiplicirt.

Bedeutet n eine beliebige positive ganze rationale Zahl, so gilt für die beiden Zahlen n und t des Bereiches $\Omega(t)$ gewiss die Ungleichung $n < t$, da die Differenz $n - t$, als Funktion von t betrachtet, für genügend grosse positive Werte von t offenbar stets negativ ausfällt. Wir sprechen diese Thatsache in folgender Weise aus: die beiden Zahlen 1 und t des Bereiches $\Omega(t)$, die beide > 0 sind, besitzen die Eigenschaft, dass ein beliebiges Vielfaches der ersteren stets kleiner als die letztere Zahl bleibt.

Wir bauen nun aus den complexen Zahlen des Bereiches $\Omega(t)$ eine Geometrie genau auf dieselbe Art auf, wie dies in § 9 unter Zugrundelegung des Bereiches Ω von algebraischen Zahlen geschehen ist: wir denken uns ein System von drei Zahlen (x, y, z) des Bereiches $\Omega(t)$ als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend vier Zahlen $(u : v : w : r)$ aus $\Omega(t)$, falls u, v, w nicht sämtlich Null sind, als eine Ebene; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) in der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt und die Gerade sei die Gesamtheit aller in zwei Ebenen gelegenen Punkte. Treffen wir sodann die entsprechenden Fest-

setzungen über die Anordnung der Elemente und über Abtragen von Strecken und Winkeln, wie in § 9, so entsteht eine *„Nicht-Archimedische“ Geometrie*, in welcher, wie die zuvor erörterten Eigenschaften des complexen Zahlensystems $\Omega(t)$ zeigen, sämtliche Axiome mit Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind. In der That können wir die Strecke 1 auf der Strecke t beliebig oft hinter einander abtragen, ohne dass der Endpunkt der Strecke t bedeckt wird; dies widerspricht der Forderung des Archimedischen Axioms.

Kapitel III.

Die Lehre von den Proportionen.

§ 13.

Complexe Zahlensysteme.

Am Anfang dieses Kapitels wollen wir einige kurze Auseinandersetzungen über complexe Zahlensysteme vorausschicken, die uns später insbesondere zur Erleichterung der Darstellung nützlich sein werden.

Die reellen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit ein System von Dingen mit folgenden Eigenschaften:

Sätze der Verknüpfung (1—12):

1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch „Addition“ eine bestimmte Zahl c, in Zeichen

$$a+b=c \quad \text{oder} \quad c=a+b.$$

2. Es giebt eine bestimmte Zahl — sie heisse 0 —, so dass für jedes a zugleich

$$a+0=a \quad \text{und} \quad 0+a=a$$

ist.

3. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so existirt stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dass

$$a+x=b \quad \text{bez.} \quad y+a=b$$

wird.

4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art durch „Multiplikation“ eine bestimmte Zahl c, in

Zeichen

$$ab = c \quad \text{oder} \quad c = ab.$$

5. Es giebt eine bestimmte Zahl — sie heisse 1 —, so dass für jedes a zugleich

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

ist.

6. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind und a nicht 0 ist, so existirt stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so dass

$$ax = b \quad \text{bez.} \quad ya = b$$

wird.

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Rechnungsgesetze:

7. $a+(b+c) = (a+b)+c$
8. $a+b = b+a$
9. $a(bc) = (ab)c$
10. $a(b+c) = ab+ac$
11. $(a+b)c = ac+bc$
12. $ab = ba.$

Sätze der Anordnung (13—16).

13. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte von ihnen (etwa a) grösser ($>$) als die andere; die letztere heisst dann die kleinere, in Zeichen:

$$a > b \quad \text{und} \quad b < a.$$

14. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

15. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets

$$a+c > b+c \quad \text{und} \quad c+a > c+b.$$

16. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist, so ist auch stets

$$ac > bc \quad \text{und} \quad ca > cb.$$

Archimedischer Satz (17).

17. Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addiren, dass die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a+a+\cdots+a > b.$$

Ein System von Dingen, das nur einen Teil der Eigenschaften 1—17 besitzt, heisse ein *complexes Zahlensystem* oder auch ein *Zahlensystem* schlechthin. Ein Zahlensystem heisse ein *Archi-*

medisches oder ein *Nicht-Archimedisches*, jenachdem dasselbe der Forderung 17 genügt oder nicht.

Von den aufgestellten Eigenschaften 1—17 sind einige Folgen der übrigen. Es entsteht die Aufgabe, die logische Abhängigkeit dieser Eigenschaften zu untersuchen. Wir werden in Kapitel VI § 32 und § 33 zwei bestimmte Fragen der angedeuteten Art wegen ihrer geometrischen Bedeutung beantworten und wollen hier nur darauf hinweisen, dass jedenfalls die letzte Forderung 17 keine logische Folge der übrigen Eigenschaften ist, da ja beispielsweise das in § 12 betrachtete complexe Zahlensystem $\Omega(t)$ sämtliche Eigenschaften 1—16 besitzt, aber nicht die Forderung 17 erfüllt.

§ 14.

Beweis des Pascalschen Satzes.

In diesem und dem folgenden Kapitel legen wir unserer Untersuchung die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme des Archimedischen Axioms, d. h. die Axiome I 1—2 und II—IV zu Grunde. In dem gegenwärtigen Kapitel III gedenken wir Euklids Lehre von den Proportionen mittelst der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst eine Thatsache, die ein besonderer Fall des bekannten Pascalschen Satzes aus der Lehre von den Kegelschnitten ist und die ich künftig kurz als den Pascalschen Satz bezeichnen will. Dieser Satz lautet:

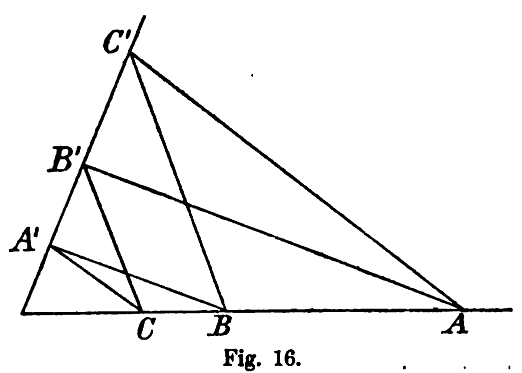


Fig. 16.

Satz 21[1]) (Pascalscher Satz). *Es seien A, B, C bez. A', B', C' je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden, die vom Schnittpunkte der Geraden verschieden sind; ist dann CB' parallel BC' und CA' parallel AC', so ist auch BA' parallel AB'.*

Um den Beweis für diesen Satz zu erbringen, führen wir

1) *F. Schur* hat einen interessanten Beweis des Pascalschen Satzes auf Grund der sämtlichen Axiome I—II, IV in den Math. Ann. Bd. 51 veröffentlicht.

zunächst folgende Bezeichnungsweise ein. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist offenbar die Kathete a durch die Hypotenuse c und den von a und c eingeschlossenen Basiswinkel α eindeutig bestimmt: wir setzen kurz

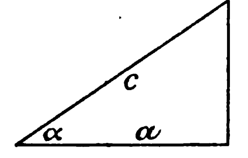


Fig. 17.

$$a = \alpha c,$$

sodass das Symbol αc stets eine bestimmte Strecke bedeutet, sobald c eine beliebig gegebene Strecke und α ein beliebig gegebener spitzer Winkel ist.

Nunmehr möge c eine beliebige Strecke und α, β mögen zwei beliebige spitze Winkel bedeuten; wir behaupten, dass allemal die Streckencongruenz

$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c$$

besteht und somit die Symbole α, β stets mit einander vertauschbar sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir die Strecke $c = AB$ und tragen an diese Strecke in A zu beiden Seiten die Winkel α und β an. Dann fällen wir von B aus auf die anderen Schenkel dieser Winkel die Lote BC und BD, verbinden C mit D und fällen schliesslich von A aus das Lot AE auf CD.

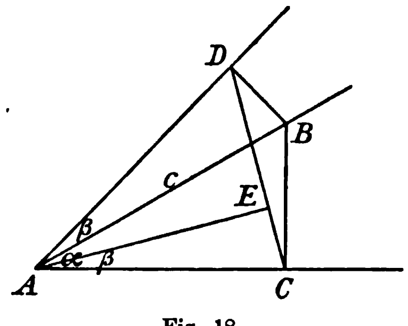


Fig. 18.

Da die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ Rechte sind, so liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise und demnach sind die beiden Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle ABD$ als Peripheriewinkel auf derselben Sehne AD einander congruent. Nun ist einerseits $\sphericalangle ACD$ zusammen mit dem $\sphericalangle CAE$ und andererseits $\sphericalangle ABD$ zusammen mit $\sphericalangle BAD$ je ein Rechter und folglich sind auch die Winkel $\sphericalangle CAE$ und $\sphericalangle BAD$ einander congruent, d. h. es ist

$$\sphericalangle CAE \equiv \beta,$$

und daher

$$\sphericalangle DAE \equiv \alpha.$$

Wir gewinnen nun unmittelbar die Streckencongruenzen

$\beta c \equiv AD$	$\alpha c \equiv AC$
$\alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE$	$\beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE,$

und hieraus folgt die Richtigkeit der vorhin behaupteten Congruenz.

Wir kehren nun zur Figur des Pascalschen Satzes zurück und bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Geraden mit O und die Strecken $OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', CA', AC', BA', AB'$ bez. mit $a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*$. Sodann fällen wir von O Lote auf l, m, n; das Lot auf l schliesse mit den beiden Geraden OA, OA' die spitzen Winkel λ', λ ein und die Lote auf m bez. n mögen mit den Geraden OA und OA' die spitzen Winkel μ', μ bez. ν', ν bilden. Drücken wir nun diese drei Lote in der vorhin angegebenen Weise mit Hülfe der Hypotenusen und Basiswinkel in den betreffenden rechtwinkligen Dreiecken auf doppelte Weise aus, so erhalten wir folgende drei Streckencongruenzen

$$\lambda b' \equiv \lambda' c, \tag{1}$$

$$\mu a' \equiv \mu' c, \tag{2}$$

$$\nu a' \equiv \nu' b. \tag{3}$$

Da nach Voraussetzung l parallel l^* und m parallel m^* sein soll, so stimmen die von O auf l^* bez. m^* zu fällenden Lote mit den Loten auf l bez. m überein und wir erhalten somit

$$\lambda c' \equiv \lambda' b, \tag{4}$$

$$\mu c' \equiv \mu' a. \tag{5}$$

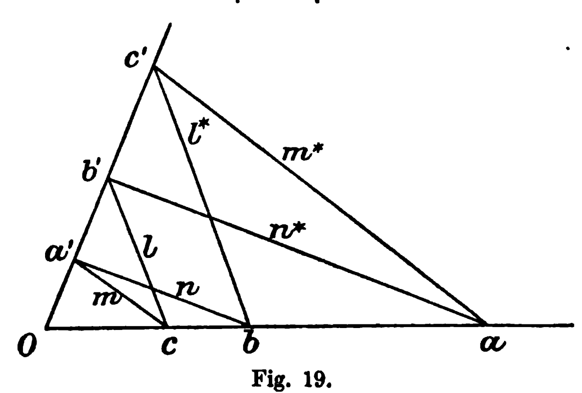


Fig. 19.

Wenn wir auf die Congruenz (3) links und rechts das Symbol $\lambda'\mu$ anwenden und bedenken, dass nach dem vorhin Bewiesenen die in Rede stehenden Symbole mit einander vertauschbar sind, so finden wir

$$\nu\lambda'\mu a' \equiv \nu'\mu\lambda' b.$$

In dieser Congruenz berücksichtigen wir links die Congruenz (2) und rechts (4); dann wird

$$\nu\lambda'\mu' c \equiv \nu'\mu\lambda c'$$

oder

$$\nu\mu'\lambda'c \equiv \nu'\lambda\mu c'.$$

Hierin berücksichtigen wir links die Congruenz (1) und rechts (5); dann wird

$$\nu\mu'\lambda b' \equiv \nu'\lambda\mu' a$$

oder

$$\lambda\mu'\nu b' \equiv \lambda\mu'\nu' a.$$

Wegen der Bedeutung unserer Symbole schliessen wir aus der letzten Congruenz sofort

$$\mu'\nu b' \equiv \mu'\nu' a$$

und hieraus

(6) $$\nu b' \equiv \nu' a.$$

Fassen wir nun das von O auf n gefällte Lot in's Auge und fällen auf dasselbe Lote von A und B' aus, so zeigt die Congruenz (6), dass die Fusspunkte der letzteren beiden Lote zusammenfallen, d. h. die Gerade $n^* = AB'$ steht zu dem Lote auf n senkrecht und ist mithin zu n parallel. Damit ist der Beweis für den Pascalschen Satz erbracht.

Wenn irgend eine Gerade, ein Punkt ausserhalb derselben und irgend ein Winkel gegeben ist, so kann man offenbar durch Abtragen dieses Winkels und Ziehen einer Parallelen eine Gerade finden, die durch den gegebenen Punkt geht und die gegebene Gerade unter dem gegebenen Winkel schneidet. Im Hinblick auf diesen Umstand dürfen wir uns zum Beweise des Pascalschen Satzes auch des folgenden einfachen Schlussverfahrens bedienen, das ich einer Mittheilung von anderer Seite verdanke.

Man ziehe durch B eine Gerade, die OA' im Punkte D' unter dem Winkel OCA' trifft, so dass die Congruenz



(1*) $$\sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OD'B$$

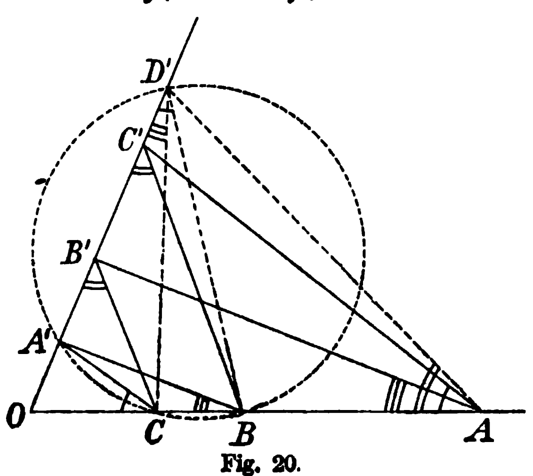


Fig. 20.

gilt; dann ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise $CBD'A'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach dem Satze von der Congruenz der Peripheriewinkel auf der nämlichen Sehne die Congruenz

$$(2^*) \qquad \sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OD'C.$$

Da CA' und AC' nach Voraussetzung einander parallel sind, so ist

$$(3^*) \qquad \sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OAC';$$

aus (1*) und (3*) folgern wir die Congruenz

$$\sphericalangle OD'B \equiv \sphericalangle OAC';$$

dann aber ist auch $BAD'C'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach dem Satze von den Winkeln im Kreisviereck die Congruenz

$$(4^*) \qquad \sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OC'B.$$

Da ferner nach Voraussetzung CB' parallel BC' ist, so haben wir auch

$$(5^*) \qquad \sphericalangle OB'C \equiv \sphericalangle OC'B;$$

aus (4*) und (5*) folgern wir die Congruenz

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OB'C;$$

diese endlich lehrt, dass $CAD'B'$ ein Kreisviereck ist, und mithin gilt auch die Congruenz

$$(6^*) \qquad \sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OD'C.$$

Aus (2*) und (6*) folgt

$$\sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OAB'$$

und die Congruenz lehrt, dass BA' und AB' einander parallel sind, wie es der Pascalsche Satz verlangt.

Fällt D' mit einem der Punkte A', B', C' zusammen, so wird eine Abänderung dieses Schlussverfahrens nothwendig, die leicht ersichtlich ist.

§ 15.

Die Streckenrechnung auf Grund des Pascalschen Satzes.

Der im vorigen Paragraph bewiesene Pascalsche Satz setzt uns in den Stand, in die Geometrie eine Rechnung mit Strecken einzuführen, in der die Rechnungsregeln für reelle Zahlen sämtlich unverändert gültig sind.

Statt des Wortes „congruent“ und des Zeichens $\equiv$ bedienen wir uns in der Streckenrechnung des Wortes „gleich“ und des Zeichens $=$.

Wenn A, B, C drei Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so bezeichnen wir $c = AC$ als die *Summe* der beiden Strecken $a = AB$ und $b = BC$ und setzen

$$c = a + b.$$

Die Strecken a und b heissen kleiner als c, in Zeichen:

$$a < c, \quad b < c,$$

und c heisst grösser als a und b, in Zeichen:

$$c > a, \quad c > b.$$

Aus den linearen Congruenzaxiomen IV 1—3 entnehmen wir leicht, dass für die eben definirte Addition der Strecken das associative Gesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

sowie das commutative Gesetz

$$a + b = b + a$$

gültig ist.

Um das Produkt einer Strecke a in eine Strecke b geometrisch zu definiren, bedienen wir uns folgender Construktion. Wir wählen zunächst eine beliebige Strecke, die für die ganze Betrachtung die nämliche bleibt, und bezeichnen dieselbe mit 1. Nunmehr tragen wir auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels vom Scheitel O aus die Strecke 1 und ferner ebenfalls vom Scheitel O aus die Strecke b ab; sodann tragen wir auf dem anderen Schenkel die Strecke a ab. Wir verbinden die Endpunkte der Strecken 1 und a durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Endpunkt der Strecke b eine Parallele; dieselbe möge auf dem anderen Schenkel eine Strecke c abschneiden: dann nennen wir diese Strecke c das *Produkt* der Strecke a in die Strecke b und bezeichnen sie mit

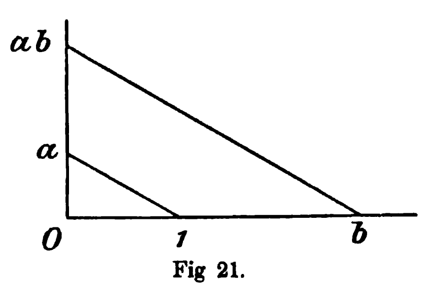


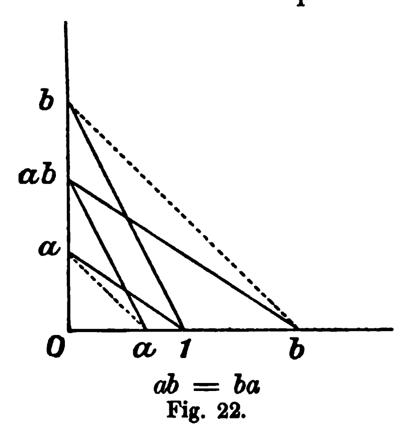
Fig 21.

$$c = ab.$$

Wir wollen vor Allem beweisen, dass für die eben definirte Multiplikation der Strecken das commutative Gesetz

$$ab = ba$$

gültig ist. Zu dem Zwecke construiren wir zuerst auf die oben festgesetzte Weise die Strecke ab. Ferner tragen wir auf dem ersten Schenkel des rechten Winkels die Strecke a und auf dem anderen Schenkel die Strecke b ab, verbinden den Endpunkt der Strecke 1 mit dem Endpunkt von b auf dem anderen Schenkel durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Endpunkt von a auf dem ersten Schenkel eine Parallele: dieselbe schneidet auf dem anderen Schenkel die Strecke ba ab; in der That fällt diese Strecke ba, wie die Figur 22 zeigt, wegen der Parallelität der punktirten Hülfslinien nach dem Pascalschen Satze (Satz 21) mit der vorhin construirten Strecke ab zusammen.

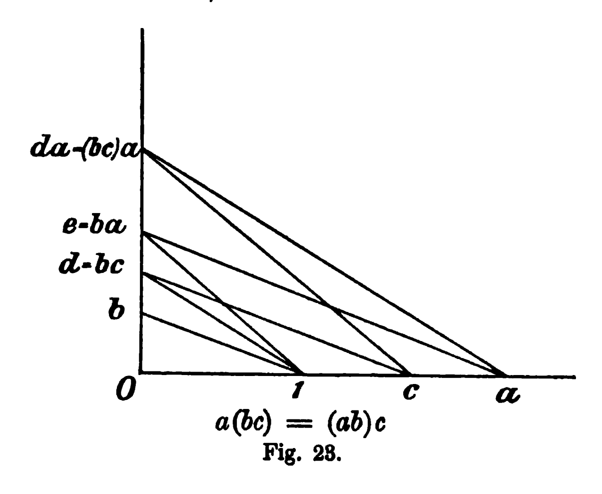


$ab = ba$
Fig. 22.

Um für unsere Multiplikation der Strecken das associative Gesetz

$$a(bc) = (ab)c$$

zu beweisen, construiren wir erst die Strecke $d = bc$, dann da, ferner die Strecke $e = ba$ und dann ec. Dass die Endpunkte von da und ec zusammenfallen, ist wiederum auf Grund des Pascalschen



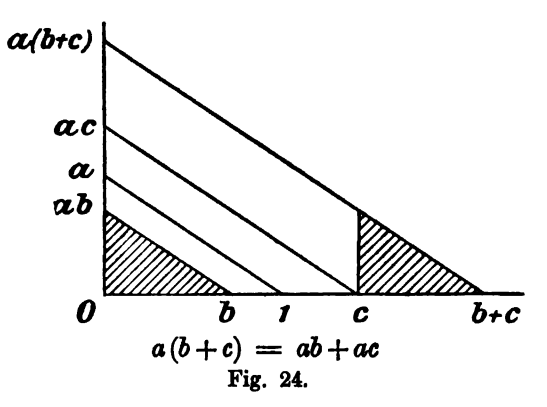
$a(bc) = (ab)c$
Fig. 23.

Satzes aus der Figur 23 unmittelbar ersichtlich und mit Benutzung des bereits bewiesenen commutativen Gesetzes folgt hieraus die obige Formel für das associative Gesetz der Streckenmultiplikation.

Endlich gilt in unserer Streckenrechnung auch das distributive Gesetz

$$a(b+c) = ab+ac.$$

Um dasselbe zu beweisen, construiren wir die Strecken ab, ac und $a(b+c)$ und ziehen dann durch den Endpunkt der Strecke c (s. Figur 24) eine Parallele zu dem anderen Schenkel des rechten Winkels. Die Congruenz der beiden rechtwinkligen in der Figur 24 schraffirten Dreiecke und die Anwendung des Satzes von der Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm liefert dann den gewünschten Nachweis.



$a(b+c) = ab+ac$

Fig. 24.

Sind b und c zwei beliebige Strecken, so giebt es stets eine Strecke a, sodass $c = ab$ wird; diese Strecke a wird mit $\frac{c}{b}$ bezeichnet und der *Quotient* von c durch b genannt.

§ 16.

Die Proportionen und die Aehnlichkeitssätze.

Mit Hülfe der eben dargelegten Streckenrechnung lässt sich *Euklids* Lehre von den Proportionen einwandsfrei und ohne Archimedisches Axiom in folgender Weise begründen.

Erklärung. Sind a, b, a', b' irgend vier Strecken, so soll die *Proportion*

$$a : b = a' : b'$$

nichts anderes bedeuten als die Streckengleichung

$$ab' = ba'.$$

Definition. Zwei Dreiecke heissen *ähnlich*, wenn entsprechende Winkel in ihnen congruent sind.

Satz 22. Wenn a, b und a', b' entsprechende Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken sind, so gilt die Proportion

$$a : b = a' : b'.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, wo die von a, b und a', b' eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken Rechte sind, und denken uns die beiden Dreiecke in ein und denselben rechten Winkel eingetragen. Wir tragen sodann vom Scheitel aus auf einem Schenkel die Strecke 1 ab und ziehen durch den Endpunkt dieser Strecke 1 die Parallele zu den beiden Hypotenusen; dieselbe schneide auf dem anderen Schenkel die Strecke e ab; dann ist nach unserer Definition des Streckenproduktes

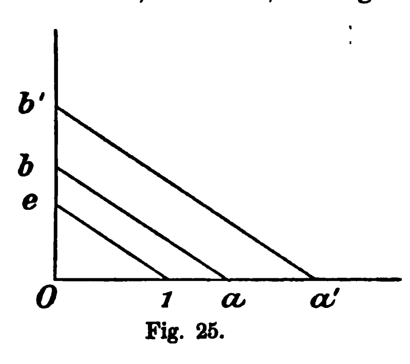


Fig. 25.

$$b = ea, \quad b' = ea';$$

mithin haben wir

$$ab' = ba'$$

d. h.

$$a : b = a' : b'.$$

Nunmehr kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück. Wir construiren in jedem der beiden ähnlichen Dreiecke den Schnittpunkt S bez. S' der drei Winkelhalbirenden und fällen von diesem die drei Lote r bez. r' auf die Dreiecksseiten; die auf diesen entstehenden Abschnitte bezeichnen wir mit

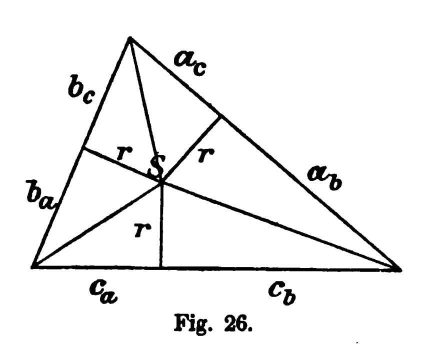


Fig. 26.

$$a_b, a_c, b_c, b_a, c_a, c_b$$

bez.

$$a'_b, a'_c, b'_c, b'_a, c'_a, c'_b.$$

Der vorhin bewiesene spezielle Fall unseres Satzes liefert dann die Proportionen

$$a_b : r = a'_b : r' \quad \Big| \quad b_c : r = b'_c : r'$$
$$a_c : r = a'_c : r' \quad \Big| \quad b_a : r = b'_a : r';$$

aus diesen schliessen wir mittelst des distributiven Gesetzes

$$a : r = a' : r', \quad b : r = b' : r'$$

und folglich mit Rücksicht auf das commutative Gesetz der Multiplikation

$$a : b = a' : b'.$$

Aus dem eben bewiesenen Satze 22 entnehmen wir leicht den Fundamentalsatz in der Lehre von den Proportionen, der wie folgt lautet:

Satz 23. *Schneiden zwei Parallele auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels die Strecken a, b bez. a', b' ab, so gilt die Proportion*

$$a : b = a' : b'.$$

Umgekehrt, wenn vier Strecken a, b, a', b' diese Proportion erfüllen und a, a' und b, b' je auf einem Schenkel eines beliebigen Winkels abgetragen werden, so sind die Verbindungsgeraden der Endpunkte von a, b bez. von a', b' einander parallel.

§ 17.

Die Gleichungen der Geraden und Ebenen.

Zu dem bisherigen System von Strecken fügen wir noch ein zweites ebensolches System von Strecken hinzu; die Strecken des neuen Systems denken wir uns durch ein Merkzeichen kenntlich gemacht und nennen sie dann „*negative*“ Strecken zum Unterschiede von den bisher betrachteten „*positiven*“ Strecken. Führen wir noch die durch einen einzigen Punkt bestimmte Strecke 0 ein, so gelten bei gehörigen Festsetzungen in dieser erweiterten Streckenrechnung sämtliche Rechnungsregeln für reelle Zahlen, die in § 13 zusammengestellt worden sind. Wir heben folgende specielle Thatsachen hervor:

Es ist stets $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Wenn $ab = 0$, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

Wenn $a > b$ und $c > 0$, so folgt stets $ac > bc$.

Wir nehmen nun in einer Ebene α durch einen Punkt O zwei zu einander senkrechte Gerade als festes rechtwinkliges Axenkreuz an und tragen dann die beliebigen Strecken x, y von O aus auf den beiden Geraden ab, und zwar nach der einen oder nach der anderen Seite hin, jenachdem die abzutragende Strecke x bez. y positiv oder negativ ist; sodann errichten wir die Lote

in den Endpunkten der Strecken x, y und bestimmen den Schnittpunkt P dieser Lote: die Strecken x, y heissen die *Coordinaten* des Punktes P; jeder Punkt der Ebene α ist durch seine Coordinaten x, y, die positive oder negative Strecken oder 0 sein können, eindeutig bestimmt.

Es sei l irgend eine Gerade in der Ebene α, die durch O und durch einen Punkt C mit den Coordinaten a, b gehe. Sind dann x, y die Coordinaten irgend eines Punktes von l, so finden wir leicht aus Satz 22

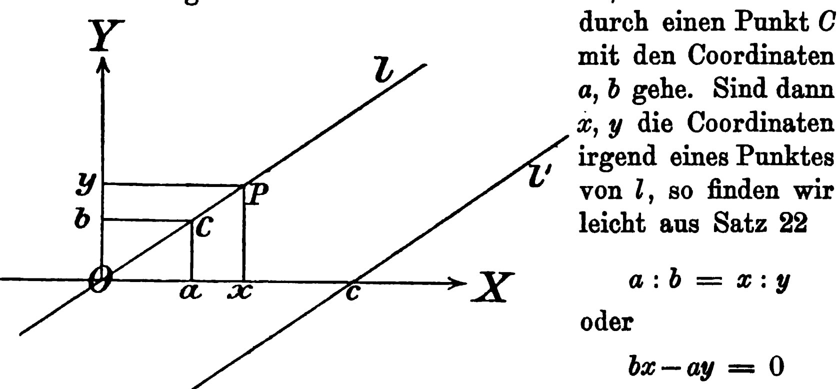


Fig. 27.

$$a : b = x : y$$

oder

$$bx - ay = 0$$

als die Gleichung der Geraden l. Ist l' eine zu l parallele Gerade, die auf der x-Axe die Strecke c abschneidet, so gelangen wir zu der Gleichung der Geraden l', indem wir in der Gleichung der Geraden l die Strecke x durch die Strecke $x-c$ ersetzen; die gewünschte Gleichung lautet also

$$bx - ay - bc = 0.$$

Aus diesen Entwickelungen schliessen wir leicht auf eine Weise, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist, dass jede Gerade in einer Ebene durch eine lineare Gleichung in den Coordinaten x, y dargestellt wird und umgekehrt jede solche lineare Gleichung eine Gerade darstellt, wenn die Coefficienten derselben in der betreffenden Geometrie vorkommende Strecken sind.

Die entsprechenden Resultate beweist man ebenso leicht in der räumlichen Geometrie.

Der weitere Aufbau der Geometrie kann von nun an nach den Methoden geschehen, die man in der analytischen Geometrie gemeinhin anwendet.

Wir haben bisher in diesem Kapitel III das Archimedische Axiom nirgends benutzt; setzen wir jetzt die Gültigkeit desselben voraus, so können wir den Punkten einer beliebigen Geraden im Raume reelle Zahlen zuordnen und zwar auf folgende Art.

Wir wählen auf der Geraden zwei beliebige Punkte aus und ordnen diesen die Zahlen 0 und 1 zu; sodann halbiren wir die durch sie bestimmte Strecke 01 und bezeichnen den entstehenden Mittelpunkt mit $\frac{1}{2}$, ferner den Mittelpunkt der Strecke $0\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{4}$ u. s. w.; nach n-maliger Ausführung dieses Verfahrens gelangen wir zu einem Punkte, dem die Zahl $\frac{1}{2^n}$ zuzuordnen ist. Nun tragen wir die Strecke $0\frac{1}{2^n}$ an den Punkt 0 sowohl nach der Seite des Punktes 1 als auch nach der anderen Seite hin etwa m mal hintereinander ab und erteilen den so entstehenden Punkten die Zahlenwerte $\frac{m}{2^n}$ bez. $-\frac{m}{2^n}$. Aus dem Archimedischen Axiom kann leicht geschlossen werden, dass auf Grund dieser Zuordnung sich jedem beliebigem Punkte der Geraden in eindeutig bestimmter Weise eine reelle Zahl zuordnen lässt und zwar so dass dieser Zuordnung folgende Eigenschaft zukommt: wenn A, B, C irgend drei Punkte der Geraden und bez. α, β, γ die zugehörigen reellen Zahlen sind und B zwischen A und C liegt, so erfüllen dieselben stets entweder die Ungleichung $\alpha < \beta < \gamma$ oder $\alpha > \beta > \gamma$.

Aus den Entwicklungen in Kap. II § 9 leuchtet ein, dass dort für jede Zahl, die dem algebraischen Zahlkörper Ω angehört, notwendig ein Punkt der Geraden existiren muss, dem sie zugeordnet ist. Ob auch jeder anderen reellen Zahl ein Punkt entspricht, lässt sich im allgemeinen nicht entscheiden, sondern hängt von der vorgelegten Geometrie ab.

Dagegen ist es stets möglich, das ursprüngliche System von Punkten, Geraden und Ebenen so durch „ideale“ oder „irrationale“ Elemente zu erweitern, dass auf irgend einer Geraden der entstehenden Geometrie jedem System von drei reellen Zahlen ohne Ausnahme ein Punkt zugeordnet ist. Durch gehörige Festsetzung kann zugleich erreicht werden, dass in der erweiterten Geometrie sämtliche Axiome I—V gültig sind. Diese (durch Hinzufügung der irrationalen Elemente) erweiterte Geometrie ist keine andere als die gewöhnliche analytische Geometrie des Raumes.

Kapitel IV.

Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

§ 18.

Die Flächengleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen.

Wir legen den Untersuchungen des gegenwärtigen Kapitels IV dieselben Axiome wie im Kapitel III zu Grunde, nämlich die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme des Archimedischen Axioms, d. h. die Axiome I 1—2 und II—IV.

Die im Kapitel III erörterte Lehre von den Proportionen und die daselbst eingeführte Streckenrechnung setzt uns in den Stand, die Euklidische Lehre von den Flächeninhalten mittelst der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Da nach den Entwickelungen im Kapitel III die Lehre von den Proportionen wesentlich auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so gilt dies auch für die Lehre von den Flächeninhalten; diese Begründung der Lehre von den Flächeninhalten erscheint mir als eine der merkwürdigsten Anwendungen des Pascalschen Satzes in der Elementargeometrie.

Erklärung. Verbindet man zwei Punkte eines Polygons P durch irgend einen Streckenzug, der ganz im Inneren des Polygons verläuft, so entstehen zwei neue Polygone P_1 und P_2, deren innere Punkte alle im Inneren von P liegen; wir sagen: P zerfällt in P_1 und P_2, oder P_1 und P_2 setzen P zusammen.

Definition. Zwei Polygone heissen *flächengleich*, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander congruent sind.

Definition. Zwei Polygone heissen *inhaltsgleich* oder *von gleichem Inhalte*, wenn es möglich ist, zu denselben flächengleiche Polygone hinzuzufügen, so dass die beiden zusammengesetzten Polygone einander flächengleich sind.

Aus diesen Definitionen folgt sofort: durch Zusammenfügung flächengleicher Polygone entstehen wieder flächengleiche Polygone, und wenn man flächengleiche Polygone von flächengleichen Polygonen wegnimmt, so sind die übrigbleibenden Polygone inhaltsgleich.

Ferner gelten folgende Sätze:

Satz 24. Sind zwei Polygone P_1 und P_2 mit einem dritten Polygon P_3 flächengleich, so sind sie auch unter einander flächengleich. Sind zwei Polygone mit einem dritten inhaltsgleich, so sind sie unter einander inhaltsgleich.

Beweis. Nach Voraussetzung lässt sich sowohl für P_1, als auch für P_2 eine Zerlegung in Dreiecke angeben, so dass einer jeden dieser beiden Zerlegungen je eine Zerlegung des Polygons P_3 in congruente Dreiecke entspricht. Indem wir diese Zerlegungen von P_3 gleichzeitig in Betracht ziehen, wird im Allgemeinen jedes Dreieck der einen Zerlegung durch Strecken, welche der anderen

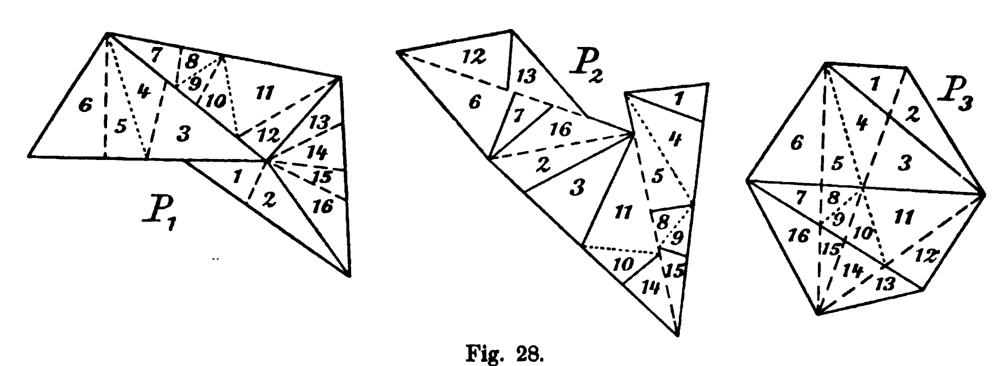


Fig. 28.

Zerlegung angehören, in Polygone zerlegt. Wir fügen nun noch so viele Strecken hinzu, dass jedes dieser Polygone selbst wieder in Dreiecke zerfällt und bringen dann die zwei entsprechenden Zerlegungen in Dreiecke in P_1 und in P_2 an; dann zerfallen offenbar diese beiden Polygone P_1 und P_2 in gleich viele paarweise einander congruente Dreiecke und sind somit nach der Definition einander flächengleich.

Der Beweis der zweiten Aussage des Satzes 24 ergiebt sich nunmehr ohne Schwierigkeit.

Wir definiren in der üblichen Weise die Begriffe: *Rechteck*, *Grundlinie* und *Höhe eines Parallelogrammes*, *Grundlinie* und *Höhe eines Dreiecks*.

§ 19.

Parallelogramme und Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe.

Die bekannte in den nebenstehenden Figuren illustrirte Schlussweise *Euklids* liefert den Satz:

Satz 25. Zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander inhaltsgleich.

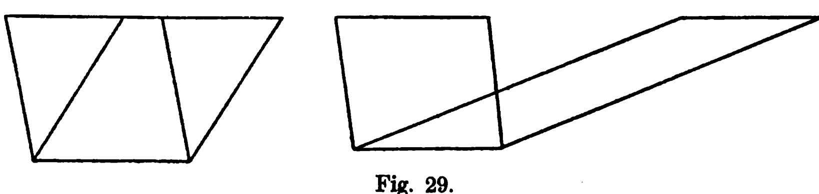


Fig. 29.

Ferner gilt die bekannte Thatsache:

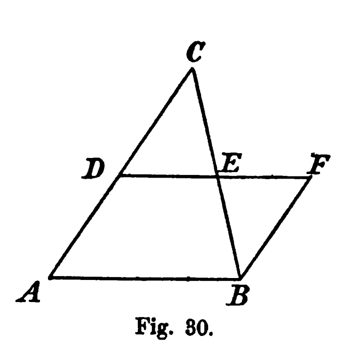


Fig. 30.

Satz 26. Ein jedes Dreieck ABC ist stets einem gewissen Parallelogramm mit gleicher Grundlinie und halber Höhe flächengleich.

Beweis: Halbirt man AC in D und BC in E und verlängert dann DE um sich selbst bis F, so sind die Dreiecke DEC und FBE einander congruent und folglich sind Dreieck ABC und Parallelogramm $ABFD$ einander inhaltsgleich.

Aus Satz 25 und Satz 26 folgt mit Hinzuziehung von Satz 24 unmittelbar:

Satz 27. Zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander inhaltsgleich.

Bekanntlich zeigt man gewöhnlich, dass zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe auch stets flächengleich sind. Wir bemerken jedoch, dass *dieser Nachweis ohne Benutzung des Archimedischen Axioms nicht möglich ist*; in der That lassen sich in unserer Nicht-Archimedischen Geometrie (vgl. Kap. II § 12) ohne Schwierigkeit solche zwei Dreiecke angeben, die gleiche Grundlinie und Höhe besitzen und folglich dem Satze 27 entsprechend inhaltsgleich, aber die dennoch nicht flächengleich sind. Als Beispiel mögen zwei Dreiecke ABC und ABD mit der gemeinsamen Grundlinie $AB = 1$ und der gleichen Höhe 1 dienen, wenn die Spitze C des ersteren Dreiecks senkrecht über A und im zweiten Dreiecke der Fusspunkt F der von der Spitze D gefällten Höhe so gelegen ist, dass $AF = t$ wird.

Die übrigen Sätze aus der elementaren Geometrie über die Inhaltsgleichheit von Polygonen, insbesondere der Pythagoräische Lehrsatz sind leichte Folgerungen der eben aufgestellten Sätze. Wir begegnen aber dennoch bei der weiteren Durchführung der Theorie der Flächeninhalte einer wesentlichen Schwierigkeit. Ins-

besondere lassen es unsere bisherigen Betrachtungen dahingestellt, ob nicht etwa alle Polygone stets einander inhaltsgleich sind. In diesem Falle wären die sämtlichen vorhin aufgestellten Sätze nichtssagend und ohne Bedeutung. Weiter entsteht die allgemeinere Frage, ob zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinschaftlichen Seite auch notwendig in der anderen Seite übereinstimmen, d. h., ob ein Rechteck durch eine Seite und den Flächeninhalt eindeutig bestimmt ist.

Wie die nähere Ueberlegung zeigt, bedarf man zur Beantwortung der aufgeworfenen Fragen der Umkehrung des Satzes 27, die folgendermassen lautet:

Satz 28. *Wenn zwei inhaltsgleiche Dreiecke gleiche Grundlinie haben, so haben sie auch gleiche Höhe.*

Dieser fundamentale Satz 28 findet sich im ersten Buch der Elemente des *Euklid* als 39ster Satz; beim Beweise desselben beruft sich jedoch *Euklid* auf den allgemeinen Grössensatz: „*Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν*“ — ein Verfahren, welches auf die Einführung eines neuen geometrischen Axioms über Flächeninhalte hinausläuft.

Es gelingt nun, den Satz 28 und damit die Lehre von den Flächeninhalten auf dem hier von uns in Aussicht genommenen Wege, d. h. lediglich mit Hülfe der ebenen Axiome ohne Benutzung des Archimedischen Axioms zu begründen. Um dies einzusehen, haben wir den Begriff des Flächenmasses nöthig.

§ 20.

Das Flächenmass von Dreiecken und Polygonen.

Definition. Wenn wir in einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c die beiden Höhen $h_a = AD$, $h_b = BE$ construiren, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BCE und ACD nach Satz 22 die Proportion

$$a : h_b = b : h_a,$$

d. h.

$$ah_a = bh_b;$$

mithin ist in jedem Dreiecke das Produkt aus einer Grundlinie und der zu ihr gehörigen Höhe davon unabhängig, welche Seite des Dreiecks man als Grundlinie wählt. Das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe eines Dreiecks Δ heisse das *Flächenmass des Dreiecks* Δ und werde mit $F(\Delta)$ bezeichnet.

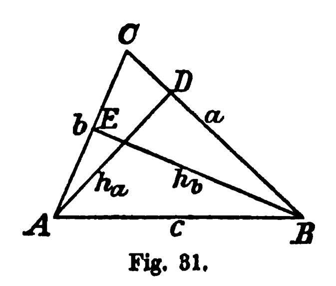
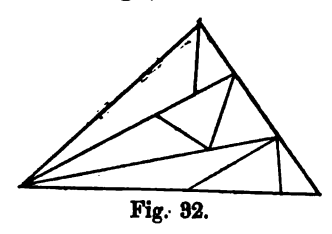


Fig. 31.

Erklärung. Eine Strecke, welche eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, heisst *Transversale*; dieselbe zerlegt das Dreieck in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Höhe, deren Grundlinien in dieselbe Gerade fallen; eine solche Zerlegung heisse eine *transversale Zerlegung des Dreiecks.*

Satz 29. Wenn ein Dreieck Δ durch beliebige Gerade irgendwie in eine gewisse endliche Anzahl von Dreiecken Δ_k zerlegt wird, so ist stets das Flächenmass des Dreiecks Δ gleich der Summe der Flächenmasse der sämtlichen Dreiecke Δ_k.

Beweis. Aus dem distributiven Gesetze in unserer Streckenrechnung folgt unmittelbar, dass das Flächenmass eines beliebigen Dreiecks gleich der Summe der Flächenmasse zweier solcher Dreiecke ist, die durch irgendwelche transversale Zerlegung aus jenem Dreieck hervorgehen. Die wiederholte Anwendung dieser Thatsache zeigt, dass das Flächenmass eines beliebigen Dreiecks auch gleich der Summe der Flächenmasse der sämtlichen Dreiecke ist, die aus dem vorgelegten Dreiecke entstehen, wenn man nach einander beliebig viele transversale Zerlegungen ausführt.


Fig. 32.

Um nun den entsprechenden Nachweis für die beliebige Zerlegung des Dreiecks Δ in Dreiecke Δ_k zu erbringen, ziehen wir von der einen Ecke A des Dreieckes Δ durch jeden Teilpunkt der Zerlegung, d. h. durch jeden Eckpunkt der Dreiecke Δ_k eine Transversale; durch diese Transversalen zerfällt das Dreieck Δ in gewisse Dreiecke Δ_t. Jedes dieser Dreiecke Δ_t zerfällt durch die Teilstrecken der gegebenen Zerlegung in gewisse Dreiecke und Vierecke. Wenn wir in den Vierecken noch je eine Diagonale construiren, so zerfällt jedes Dreieck Δ_t in gewisse Dreiecke Δ_{tt}. Wir wollen nun zeigen, dass die Zerlegung in Dreiecke Δ_{tt} sowohl für die Dreiecke Δ_t als auch für die Dreiecke Δ_k nichts anderes als eine Kette von transversalen Zerlegungen bedeutet.

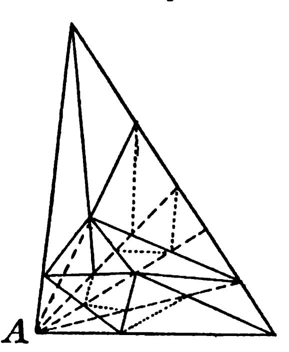


Fig. 33.

In der That, zunächst ist klar, dass jede Zerlegung eines Dreiecks in Teildreiecke stets durch eine Reihe von transversalen

Zerlegungen bewirkt werden kann, wenn bei der Zerlegung im Inneren des Dreiecks keine Teilpunkte liegen und überdies wenigstens eine Seite des Dreiecks von Teilpunkten frei bleibt.

Nun ist für die Dreiecke Δ_i unsere Behauptung aus dem Umstande ersichtlich, dass für jedes derselben das Innere sowie eine Seite, nämlich die dem Punkte A gegenüberliegende Seite von weiteren Teilpunkten frei ist.

Aber auch für jedes Δ_k ist die Zerlegung in Δ_{ik} auf transversale Zerlegungen zurückführbar. Betrachten wir nämlich ein Dreieck Δ_k, so wird es unter den von A ausgehenden Transversalen im Dreieck Δ eine bestimmte Transversale geben, in welche entweder eine Seite von Δ_k hineinfällt oder welche selbst das Dreieck Δ_k in zwei Dreiecke zerlegt. Im ersten Fall bleibt die betreffende Seite des Dreiecks Δ_k überhaupt frei von weiteren Teilpunkten bei der Zerlegung in Dreiecke Δ_{ik}; im letzteren Falle ist die im Inneren des Dreiecks Δ_k verlaufende Strecke jener Transversale in den beiden entstehenden Dreiecken eine Seite, die bei der Teilung in Dreiecke Δ_{ik} von weiteren Teilpunkten gewiss frei bleibt.

Nach der am Anfang dieses Beweises angestellten Betrachtung ist das Flächenmass $F(\Delta)$ des Dreiecks Δ gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_i)$ der Dreiecke Δ_i, und diese Summe ist gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_{ik})$. Andererseits ist auch die Summe über die Flächenmasse $F(\Delta_k)$ aller Dreiecke Δ_k gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_{ik})$, und hieraus folgt endlich, dass das Flächenmass $F(\Delta)$ auch gleich der Summe aller Flächenmasse $F(\Delta_k)$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes 29 vollständig erbracht.

Definition. Definiren wir das Flächenmass $F(P)$ eines Polygons als die Summe der Flächenmasse aller Dreiecke, in die dasselbe bei einer bestimmten Zerlegung zerfällt, so erkennen wir auf Grund des Satzes 29 durch eine ähnliche Schlussweise, wie wir sie in § 18 beim Beweise des Satzes 24 angewandt haben, dass das Flächenmass eines Polygons von der Art der Zerlegung in Dreiecke unabhängig ist und mithin allein durch das Polygon sich eindeutig bestimmt. Aus dieser Definition entnehmen wir vermittels des Satzes 29 die Thatsache, dass flächengleiche Polygone gleiches Flächenmass haben.

Sind ferner P und Q zwei inhaltsgleiche Polygone, so muss es nach der Definition zwei flächengleiche Polygone P' und Q' geben, so dass das aus P und P' zusammengesetzte Polygon mit

dem aus Q und Q' zusammengesetzten Polygon flächengleich ausfällt. Aus den beiden Gleichungen:

$$F(P+P') = F(Q+Q'),$$
$$F(P') = F(Q')$$

schliessen wir leicht

$$F(P) = F(Q),$$

d. h. inhaltsgleiche Polygone haben gleiches Flächenmass.

Aus der letzteren Thatsache entnehmen wir unmittelbar den Beweis des Satzes 28. Bezeichnen wir nämlich die gleiche Grundlinie der beiden Dreiecke mit g, die zugehörigen Höhen mit h und h', so schliessen wir aus der angenommenen Inhaltsgleichheit der beiden Dreiecke, dass dieselben auch gleiches Flächenmass haben müssen, d. h. es folgt:

$$\tfrac{1}{2}gh = \tfrac{1}{2}gh'$$

und mithin nach Division durch $\frac{1}{2}g$

$$h = h';$$

dies ist die Aussage des Satzes 28.

§ 21.

Die Inhaltsgleichheit und das Flächenmass.

In § 20 haben wir gefunden, dass inhaltsgleiche Polygone stets gleiches Flächenmass haben. Diese Aussage lässt sich auch umkehren.

Um diese Umkehrung zu beweisen, betrachten wir zunächst zwei Dreiecke ABC und $AB'C'$ mit gemeinsamem rechten Winkel bei A. Die Flächenmasse dieser beiden Dreiecke drücken sich durch die Formeln

C C' A B B'

Fig. 34.

$$F(ABC) = \tfrac{1}{2}AB \cdot AC,$$
$$F(AB'C') = \tfrac{1}{2}AB' \cdot AC'$$

aus. Nehmen wir an, dass diese beiden Flächenmasse einander gleich sind, so folgt:

$$AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$$

oder

$$AB : AB' = AC' : AC$$

und hieraus ergiebt sich nach Satz 23, dass die beiden Geraden BC' und $B'C$ einander parallel sind und sodann erweisen sich nach Satz 27 die beiden Dreiecke $BC'B'$ und $BC'C$ als inhaltsgleich. Durch Hinzufügen des Dreiecks ABC' folgt, dass die beiden Dreiecke ABC und $AB'C'$ einander inhaltsgleich sind. Wir haben damit erkannt, dass zwei rechtwinklige Dreiecke mit gleichem Flächenmass auch stets einander inhaltsgleich sind.

Nehmen wir jetzt ein beliebiges Dreieck mit der Grundlinie g und der Höhe h, so ist dasselbe nach Satz 27 inhaltsgleich einem rechtwinkligen Dreieck mit den beiden Katheten g und h; und da das ursprüngliche Dreieck offenbar dasselbe Flächenmass wie das rechtwinklige Dreieck besitzt, so folgt, dass in der letzten Betrachtung die Einschränkung auf rechtwinklige Dreiecke nicht nötig war; damit haben wir erkannt, dass zwei beliebige Dreiecke mit gleichem Flächenmass auch stets einander inhaltsgleich sind.

Es sei nunmehr ein beliebiges Polygon P mit dem Flächenmass g vorgelegt; P zerfalle in n Dreiecke mit den Flächenmassen bez. $g_1, g_2, \ldots, g_n$; dann ist

$$g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n.$$

Wir construiren nun ein Dreieck ABC mit der Grundlinie

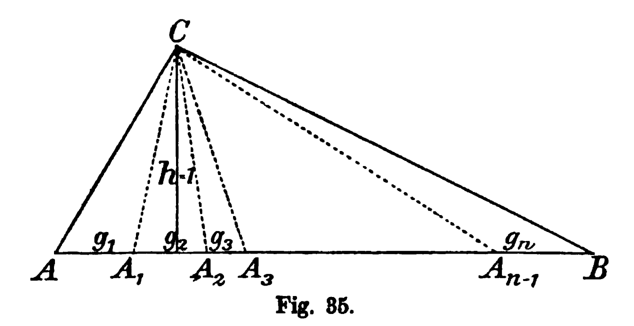


Fig. 35.

$AB = g$ und der Höhe $h = 1$ und markiren auf der Grundlinie die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, sodass

$$g_1 = AA_1, \quad g_2 = A_1 A_2, \ldots, \quad g_{n-1} = A_{n-2} A_{n-1}, \quad g_n = A_{n-1} B$$

ausfällt. Da die Dreiecke innerhalb des Polygons P bez. die

gleichen Flächenmasse besitzen, wie die Dreiecke AA_1C, A_1A_2C, ..., $A_{n-2}A_{n-1}C$, $A_{n-1}BC$, so sind sie nach dem vorhin Bewiesenen diesen auch inhaltsgleich; folglich ist das Polygon P einem Dreiecke mit der Grundlinie g und der Höhe $h = 1$ inhaltsgleich. Hieraus folgt mit Hülfe von Satz 24, dass zwei Polygone mit gleichem Flächenmass einander stets inhaltsgleich sind.

Die beiden in diesem und dem vorigen Paragraph gefundenen Thatsachen fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Satz 30. *Zwei inhaltsgleiche Polygone haben stets das gleiche Flächenmass*; und umgekehrt: *Zwei Polygone mit gleichem Flächenmass sind stets einander inhaltsgleich.*

Insbesondere müssen zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite auch in den anderen Seiten übereinstimmen. Auch folgt der Satz:

Satz 31. Zerlegt man ein Rechteck durch Gerade in mehrere Dreiecke und lässt auch nur eines dieser Dreiecke fort, so kann man mit den übrigen Dreiecken das Rechteck nicht mehr ausfüllen.

Dieser Satz 31 ist von *F. Schur*[1]) und *W. Killing*[2]) mit Hülfe des Archimedischen Axioms bewiesen und von *O. Stolz*[3]) als Axiom hingestellt worden. Im Vorstehenden ist gezeigt, dass derselbe völlig unabhängig von dem Archimedischen Axiom gilt. Der Satz 31 reicht übrigens zur Begründung des Euklidischen Satzes von der Gleichheit der Höhen in inhaltsgleichen Dreiecken auf gleicher Grundlinie (Satz 28) an sich nicht aus, wenn man von der Anwendung des Archimedischen Axioms absieht.

Zum Beweise der Sätze 28, 29, 30 haben wir wesentlich die in Kapitel III § 15 eingeführte Streckenrechnung benutzt, und da diese im Wesentlichen auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so erweist sich für die Lehre von den Flächeninhalten der Pascalsche Satz als der wichtigste Baustein. Wir erkennen leicht, dass auch umgekehrt aus den Sätzen 27 und 28 der Pascalsche Satz wieder gewonnen werden kann.

Von zwei Polygonen P und Q nennen wir P *inhaltskleiner* bez. *inhaltsgrösser* als Q, je nachdem das Flächenmass $F(P)$ kleiner oder grösser als $F(Q)$ ausfällt. Es ist nach dem Vorstehenden klar, dass die Begriffe inhaltsgleich, inhaltskleiner und inhaltsgrösser sich gegenseitig ausschliessen. Ferner erkennen wir leicht,

1) Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges. 1892.
2) Grundlagen der Geometrie, Bd. 2, Absch. 5, § 5, 1898.
3) Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5, 1894.

dass ein Polygon, welches ganz im Inneren eines anderen Polygons liegt, stets inhaltskleiner als dieses sein muss.

Hiermit haben wir die wesentlichen Sätze der Lehre von den Flächeninhalten begründet.

Kapitel V.

Der Desarguessche Satz.

§ 22.

Der Desarguessche Satz und der Beweis desselben in der Ebene mit Hülfe der Congruenzaxiome.

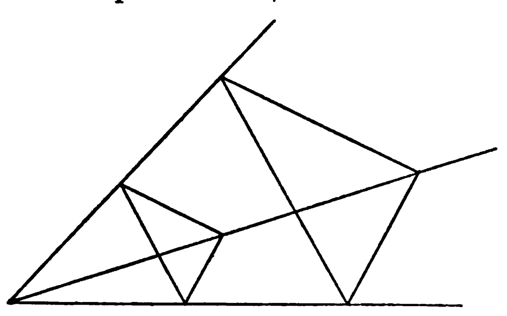
Von den im Kapitel I aufgestellten Axiomen sind diejenigen der Gruppen II—V sämtlich teils lineare, teils ebene Axiome; die Axiome 3—7 der Gruppe I sind die einzigen räumlichen Axiome. Um die Bedeutung dieser räumlichen Axiome klar zu erkennen, denken wir uns irgend eine ebene Geometrie vorgelegt und untersuchen allgemein die Bedingungen dafür, dass diese ebene Geometrie sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen lässt, in welcher wenigstens die Axiome der Gruppen I—III sämtlich erfüllt sind.

Auf Grund der Axiome der Gruppen I—III ist es bekanntlich leicht möglich, den sogenannten Desarguesschen Satz zu beweisen; derselbe ist ein ebener Schnittpunktsatz. Wir nehmen insbesondere die Gerade, auf der die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke liegen sollen, zur „Unendlichfernen", wie man sagt, und bezeichnen den so entstehenden Satz nebst seiner Umkehrung schlechthin als Desarguesschen Satz; dieser Satz lautet, wie folgt:

Satz 32. (Desarguesscher Satz.) Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, dass je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch ein und denselben Punkt oder sind einander parallel, und umgekehrt:

Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, dass die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen Punkt

laufen oder einander parallel sind, und wenn ferner zwei Paare



entsprechender Seiten in den Dreiecken einander parallel sind, so sind auch die dritten Seiten der beiden Dreiecke einander parallel.

Wie bereits erwähnt, ist der Satz 32 eine Folge der Axiome I—III; dieser Thatsache gemäss ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene jedenfalls eine notwendige Bedingung dafür, dass die Geometrie dieser Ebene sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen lässt, in welcher die Axiome der Gruppen I—III sämtlich erfüllt sind.

Wir nehmen nun wie in den Kapiteln III und IV eine ebene Geometrie an, in welcher die Axiome I 1—2 und II—IV gelten, und denken uns in derselben nach § 15 eine Streckenrechnung eingeführt: dann lässt sich, wie in § 17 dargelegt worden ist, jedem Punkte der Ebene ein Paar von Strecken (x, y) und jeder Geraden ein Verhältnis von drei Strecken $(u : v : w)$ zuordnen derart, dass die lineare Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade darstellt. Das System aller Strecken in unserer Geometrie bildet nach § 17 einen Zahlenbereich, für welchen die in § 13 aufgezählten Eigenschaften 1—16 bestehen, und wir können daher mittelst dieses Zahlenbereiches, ähnlich wie es in § 9 oder § 12 mittelst des Zahlensystems Ω bez. $\Omega(t)$ geschehen ist, eine räumliche Geometrie construiren: wir setzen zu dem Zwecke fest, dass ein System von drei Strecken (x, y, z) einen Punkt, die Verhältnisse von vier Strecken $(u : v : w : r)$ eine Ebene darstellen möge, während die Geraden als Schnitte zweier Ebenen definirt sind; dabei drückt die lineare Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

aus, dass der Punkt (x, y, z) auf der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt. Was endlich die Anordnung der Punkte auf einer Geraden oder

der Punkte einer Ebene in Bezug auf eine Gerade in ihr oder endlich die Anordnung der Punkte in Bezug auf eine Ebene im Raume anbetrifft, so wird diese in analoger Weise durch Ungleichungen zwischen Strecken bestimmt, wie dies in § 9 für die Ebene geschehen ist.

Da wir durch das Einsetzen des Wertes $z = 0$ die ursprüngliche ebene Geometrie wieder gewinnen, so erkennen wir, dass unsere ebene Geometrie als Teil einer räumlichen Geometrie betrachtet werden kann. Nun ist hierfür die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes nach den obigen Ausführungen eine notwendige Bedingung, und daher folgt, dass in der angenommenen ebenen Geometrie auch der Desarguessche Satz gelten muss.

Wir bemerken, dass die eben gefundene Thatsache sich auch direkt aus dem Satze 23 in der Lehre von den Proportionen ohne Mühe ableiten lässt.

§ 23.

Die Nichtbeweisbarkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene ohne Hülfe der Congruenzaxiome.

Wir untersuchen nun die Frage, ob in der ebenen Geometrie auch ohne Hülfe der Congruenzaxiome der Desarguessche Satz bewiesen werden kann, und gelangen dabei zu folgendem Resultate:

Satz 33. *Es giebt eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome* I 1—2, II—III, IV 1—5, V, *d. h. sämtliche linearen und ebenen Axiome mit Ausnahme des Congruenzaxioms* IV 6 *erfüllt sind, während der Desarguessche Satz* (Satz 32) ***nicht** gilt. Der Desarguessche Satz kann mithin aus den genannten Axiomen allein nicht gefolgert werden: es bedarf zum Beweise desselben notwendig entweder der räumlichen Axiome oder der sämtlichen Congruenzaxiome.*

Beweis. Wir wählen in der gewöhnlichen ebenen Geometrie, deren Möglichkeit bereits im Kapitel II § 9 erkannt worden ist, irgend zwei zu einander senkrechte Gerade als Coordinatenaxen X, Y und denken uns um den Nullpunkt O dieses Coordinatensystems als Mittelpunkt eine Ellipse mit den Halbaxen 1 und $\frac{1}{2}$ construirt; endlich bezeichnen wir mit F den Punkt, welcher in der Entfernung $\frac{3}{2}$ von O auf der positiven X-Axe liegt.

Wir fassen nun die Gesamtheit aller Kreise ins Auge, welche die Ellipse in vier reellen — getrennten oder beliebig zusammenfallenden — Punkten schneiden, und suchen unter allen auf diesen Kreisen gelegenen Punkten denjenigen Punkt zu bestimmen, der auf der positiven X-Axe am weitesten vom Nullpunkt entfernt

ist. Zu dem Zwecke gehen wir von einem beliebigen Kreise aus, der die Ellipse in vier Punkten schneidet und die positive X-Axe im Punkte C treffen möge. Diesen Kreis denken wir uns dann um den Punkt C derart gedreht, dass zwei von den vier Schnittpunkten oder mehr in einen einzigen Punkt A zusammenfallen, während die übrigen reell bleiben. Der so entstehende Berührungskreis werde alsdann vergrössert derart, dass stets der Punkt A Berührungspunkt mit der Ellipse bleibt; hierdurch gelangen wir notwendig zu einem Kreise, der die Ellipse entweder noch in einem anderen Punkte B berührt oder in A mit der Ellipse eine vierpunktige Berührung aufweist und der überdies die positive X-Axe in einem entfernteren Punkte als C trifft. Der gesuchte entfernteste Punkt wird sich demnach unter denjenigen Punkten befinden, die von den doppeltberührenden ausserhalb der Ellipse verlaufenden Kreisen auf der positiven X-Axe ausgeschnitten werden. Die doppeltberührenden ausserhalb der Ellipse verlaufenden Kreise liegen nun, wie man leicht sieht, sämtlich zur Y-Axe symmetrisch. Es seien a, b die Coordinaten irgend eines Punktes der Ellipse: dann lehrt eine leichte Rechnung, dass der in diesem Punkte berührende zur Y-Axe symmetrische Kreis auf der positiven X-Axe die Strecke

$$x = |\sqrt{1+3b^2}|$$

abschneidet. Der grösstmögliche Wert dieses Ausdrucks tritt für $b = \frac{1}{2}$ ein und wird somit gleich $\frac{1}{2}|\sqrt{7}|$. Da der vorhin mit F bezeichnete Punkt auf der X-Axe die Abscisse $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}|\sqrt{7}|$ aufweist, so folgt, dass unter den die Ellipse viermal treffenden Kreisen sich gewiss keiner befindet, der durch den Punkt F läuft.

Nunmehr stellen wir uns eine neue ebene Geometrie in folgender Weise her. Als Punkte der neuen Geometrie nehmen wir die Punkte der XY-Ebene; als Gerade der neuen Geometrie nehmen wir diejenigen Geraden der XY-Ebene unverändert, welche die feste Ellipse berühren oder gar nicht treffen; ist dagegen g eine Gerade der XY-Ebene, die die Ellipse in zwei Punkten P und Q trifft, so construiren wir durch P, Q und den festen Punkt F einen Kreis; dieser Kreis hat, wie aus dem oben Bewiesenen hervorgeht, keinen weiteren Punkt mit der Ellipse gemein. Wir denken uns nun an Stelle des zwischen P und Q innerhalb der Ellipse gelegenen Stückes der Geraden g denjenigen Bogen des eben construirten Kreises gesetzt, der zwischen P und Q innerhalb der Ellipse verläuft. Den Linienzug, welcher aus den beiden

von P und Q ausgehenden unendlichen Stücken der Geraden g und dem eben construirten Kreisbogen PQ besteht, nehmen wir als Gerade der neu herzustellenden Geometrie. Denken wir uns für alle Geraden der XY-Ebene die entsprechenden Linienzüge construirt, so entsteht ein System von Linienzügen, welche, als

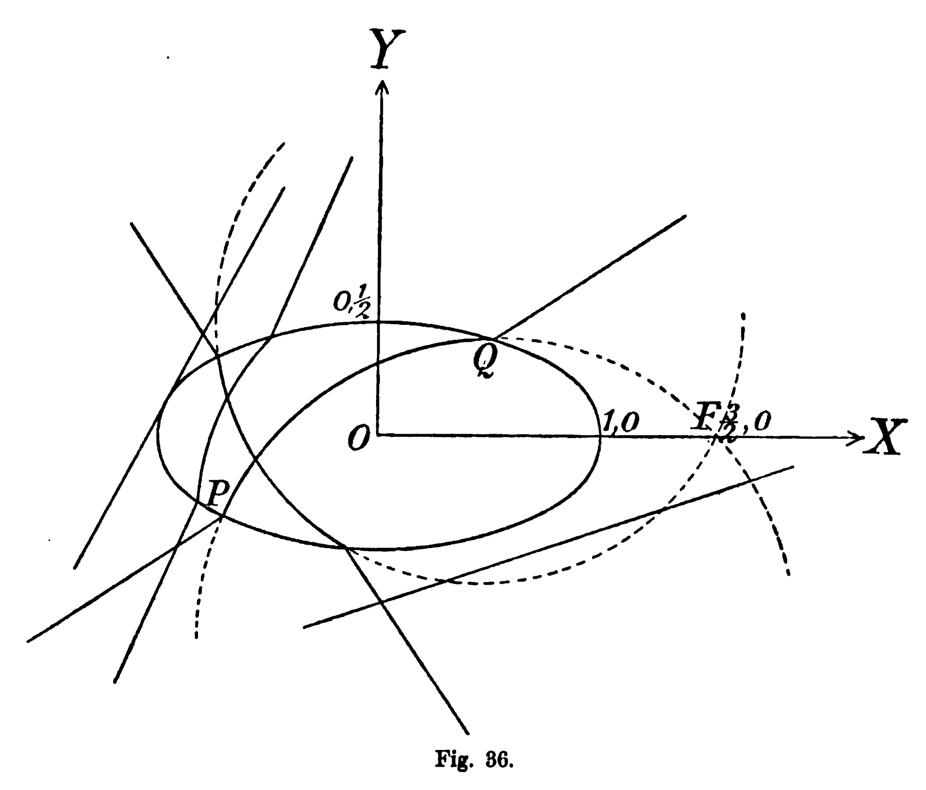


Fig. 36.

Gerade einer Geometrie aufgefasst, offenbar den Axiomen I 1—2 und III genügen. Bei Festsetzung der natürlichen Anordnung für die Punkte und Geraden in unserer neuen Geometrie erkennen wir unmittelbar, dass auch die Axiome II gültig sind.

Ferner nennen wir zwei Strecken AB und $A'B'$ in unserer neuen Geometrie congruent, wenn der zwischen A und B verlaufende Linienzug die gleiche natürliche Länge hat, wie der zwischen A' und B' verlaufende Linienzug.

Endlich bedürfen wir einer Festsetzung betreffs der Congruenz der Winkel. Sobald keiner von den Scheiteln der zu vergleichenden Winkel auf der Ellipse liegt, nennen wir zwei Winkel einander congruent, wenn sie im gewöhnlichen Sinne einander gleich sind. Im anderen Falle treffen wir folgende Festsetzung. Es

mögen die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge und die Punkte A', B' C' in dieser Reihenfolge je auf einer Geraden unserer neuen Geometrie liegen; D sei ein Punkt ausserhalb der Geraden ABC und D' ein Punkt ausserhalb der Geraden $A'B'C'$: dann mögen für die Winkel zwischen diesen Geraden in unserer neuen Geometrie die Congruenzen

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D' \quad \text{und} \quad \sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle C'B'D'$$

gelten, sobald für die natürlichen Winkel zwischen den entsprechenden Linienzügen in der gewöhnlichen Geometrie die Proportion

$$\sphericalangle ABD : \sphericalangle CBD = \sphericalangle A'B'D' : \sphericalangle C'B'D'$$

erfüllt ist. Bei diesen Festsetzungen sind auch die Axiome IV 1—5 und V gültig.

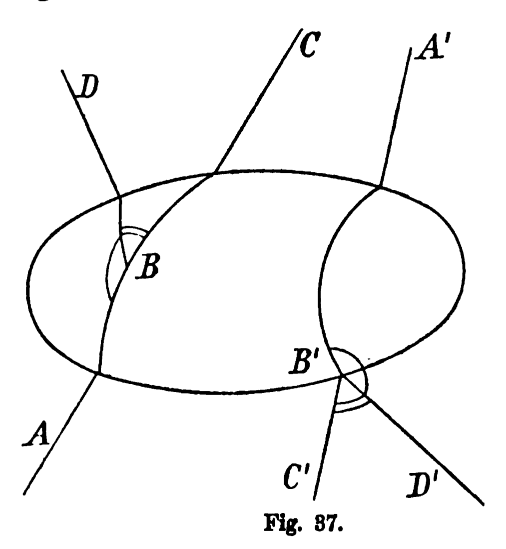


Fig. 37.

Um einzusehen, dass in unserer neu hergestellten Geometrie der Desarguessche Satz nicht gilt, betrachten wir folgende drei gewöhnliche gerade Linien in der XY-Ebene: die X-Axe, die Y-Axe und die Gerade, welche die beiden Ellipsenpunkte $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ und $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$ mit einander verbindet. Da diese drei gewöhnlichen geraden Linien durch den Nullpunkt O laufen, so können wir leicht zwei solche Dreiecke angeben, deren Ecken bez. auf jenen drei Geraden liegen, deren entsprechende Seiten paarweise einander parallel laufen und die sämtlich ausserhalb der Ellipse gelegen sind. Da die Linienzüge, welche aus den genannten drei geraden Linien entspringen, sich, wie Figur 38

zeigt und wie man leicht durch Rechnung bestätigt, nicht in

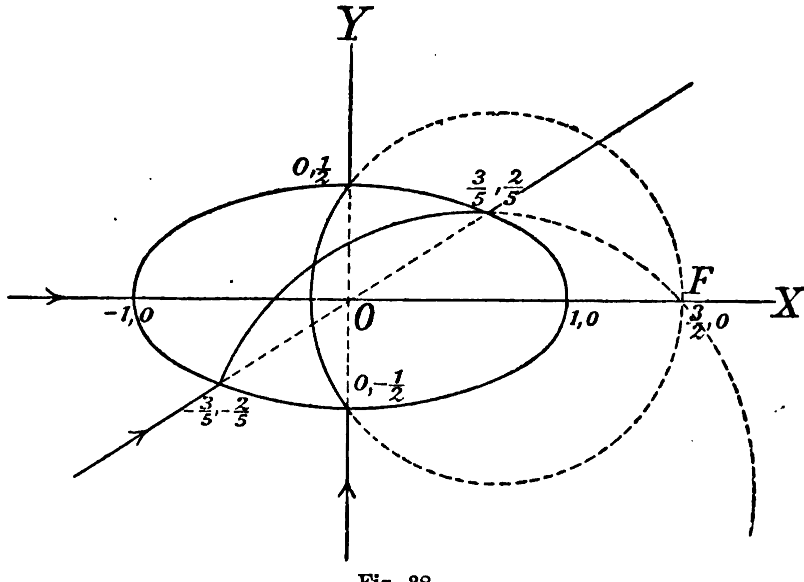


Fig. 38.

einem Punkte treffen, so folgt, dass der Desarguessche Satz in der neuen ebenen Geometrie für die beiden vorhin construirten Dreiecke gewiss nicht gilt.

Die von uns hergestellte ebene Geometrie dient zugleich als Beispiel einer ebenen Geometrie, in welcher die Axiome I 1—2, II—III, IV 1—5, V gültig sind, und die sich dennoch **nicht** als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen lässt.

§ 24.

Einführung einer Streckenrechnung ohne Hülfe der Congruenzaxiome auf Grund des Desarguesschen Satzes.

Um die Bedeutung des Desarguesschen Satzes (Satz 32) vollständig zu erkennen, legen wir eine ebene Geometrie zu Grunde, in welcher die Axiome I 1—2, II—III, d. h. die sämtlichen ebenen Axiome der ersten drei Axiomgruppen gültig sind, und führen in diese Geometrie **unabhängig von den Congruenzaxiomen** auf folgende Weise eine neue Streckenrechnung ein.

Wir nehmen in der Ebene zwei feste Geraden an, die sich in dem Punkte O schneiden mögen, und rechnen im Folgenden nur mit solchen Strecken, deren Anfangspunkt O ist und deren Endpunkte auf einer dieser beiden festen Geraden liegen. Auch

den Punkt O allein bezeichnen wir als Strecke und nennen ihn dann die Strecke 0, in Zeichen

$$OO = 0 \quad \text{oder} \quad 0 = OO.$$

Es seien E und E' je ein bestimmter Punkt auf den festen Geraden durch O; dann bezeichnen wir die beiden Strecken OE und OE' als die Strecken 1, in Zeichen:

$$OE = OE' = 1 \quad \text{oder} \quad 1 = OE = OE'.$$

Die Gerade EE' nennen wir kurz die Einheitsgerade. Sind ferner A und A' Punkte auf den Geraden OE bez. OE' und läuft die Verbindungsgerade AA' parallel zu EE', so nennen wir die Strecken OA und OA' einander gleich, in Zeichen:

$$OA = OA' \quad \text{oder} \quad OA' = OA.$$

Um zunächst die Summe der Strecken $a = OA$ und $b = OB$ zu definiren, construire man AA' parallel zur Einheitsgeraden EE' und ziehe sodann durch A' eine Parallele zu OE und durch B eine Parallele zu OE'. Diese beiden Parallelen mögen sich in A'' schneiden. Endlich ziehe man durch A'' zur Einheitsgeraden EE' eine Parallele; dieselbe treffe die festen Geraden OE und

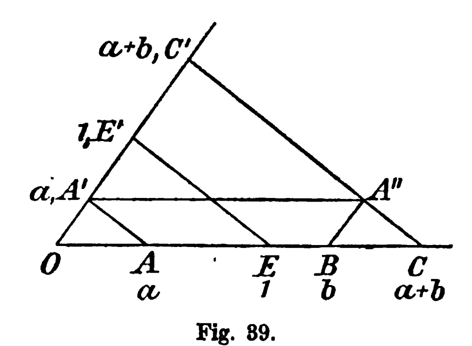


Fig. 39.

OE' in C und C': dann heisse $c = OC = OC'$ die *Summe* der Strecke $a = OA$ mit der Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$c = a + b \quad \text{oder} \quad a + b = c.$$

Um das Produkt einer Strecke $a = OA$ in eine Strecke $b = OB$ zu definiren, bedienen wir uns genau der in § 15 angegebenen Konstruktion, nur dass an Stelle der Schenkel des rechten Winkels hier die beiden festen Geraden OE und OE' treten. Die Konstruktion ist demnach folgende. Man bestimme auf OE' den Punkt A', sodass AA' parallel der Einheitsgeraden EE' wird, ver-

binde E mit A' und ziehe durch B eine Parallele zu EA'; trifft

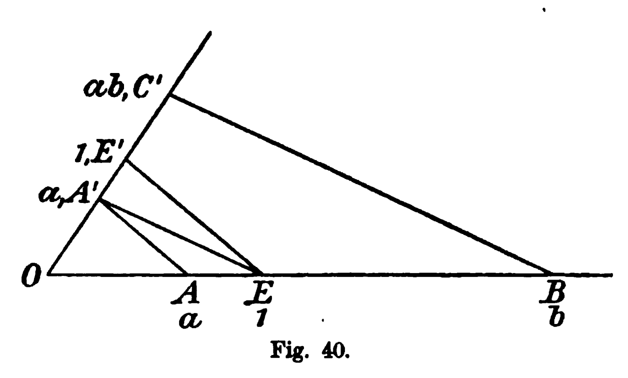


Fig. 40.

diese Parallele die feste Gerade OE' im Punkte C', so heisst $c = OC'$ das Produkt der Strecke $a = OA$ in die Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$c = ab \quad \text{oder} \quad ab = c.$$

§ 25.

Das commutative und associative Gesetz der Addition in der neuen Streckenrechnung.

Wir untersuchen jetzt, welche von den in § 13 aufgestellten Rechnungsgesetzen für unsere neue Streckenrechnung gültig sind, wenn wir eine ebene Geometrie zu Grunde legen, in der die Axiome I 1—2, II—III erfüllt sind und überdies der Desarguessche Satz gilt.

Vor Allem wollen wir beweisen, dass für die in § 24 definirte Addition der Strecken das commutative Gesetz

$$a + b = b + a$$

gilt. Es sei

$$a = OA = OA',$$
$$b = OB = OB',$$

wobei unserer Festsetzung entsprechend AA' und BB' der Einheitsgeraden parallel sind. Nun construiren wir die Punkte A'' und B'', indem wir $A'A''$ sowie $B'B''$ parallel OA und ferner AB'' und BA'' parallel OA' ziehen; wie man sofort sieht, sagt dann unsere Behauptung aus, dass die Verbindungslinie $A''B''$ parallel mit AA' läuft. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennen wir auf Grund des Desarguesschen Satzes (Satz 32) wie folgt.

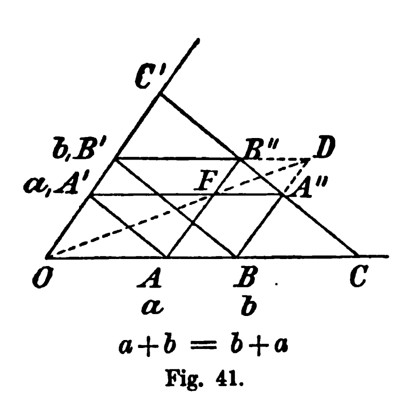


Fig. 41.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von AB'' und $A'A''$ mit F und den Schnittpunkt von BA'' und $B'B''$ mit D; dann sind in den Dreiecken $AA'F$ und $BB'D$ die entsprechenden Seiten einander parallel. Mittelst des Desarguesschen Satzes schliessen wir hieraus, dass die drei Punkte O, F, D in einer Geraden liegen. In Folge dieses Umstandes liegen die beiden Dreiecke OAA' und $DB''A''$ derart, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt F laufen und da überdies zwei Paare entsprechender Seiten, nämlich OA und DB'' sowie OA' und DA'' einander parallel sind, so laufen nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes (Satz 32) auch die dritten Seiten AA' und $B''A''$ einander parallel.

Zum Beweise des associativen Gesetzes der Addition

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

dient die Figur 42. Mit Berücksichtigung des eben bewiesenen commutativen Gesetzes der Addition spricht sich die obige Behauptung, wie man sieht, darin aus, dass die Gerade $A''B''$ parallel

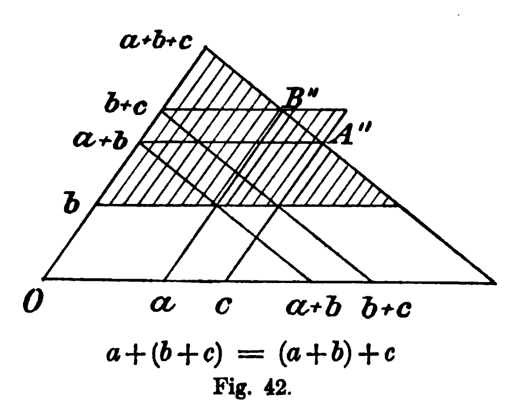


Fig. 42.

der Einheitsgeraden verlaufen muss. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist offenbar, da der schraffirte Teil der Figur 42 mit der Figur 41 genau übereinstimmt.

§ 26.

Das associative Gesetz der Multiplikation und die beiden distributiven Gesetze in der neuen Streckenrechnung.

Bei unseren Annahmen gilt auch für die Multiplikation der Strecken das associative Gesetz:

$$a(bc) = (ab)c.$$

Es seien auf der ersteren der beiden festen Geraden durch O die Strecken

$$1 = OA, \quad b = OC, \quad c = OA'$$

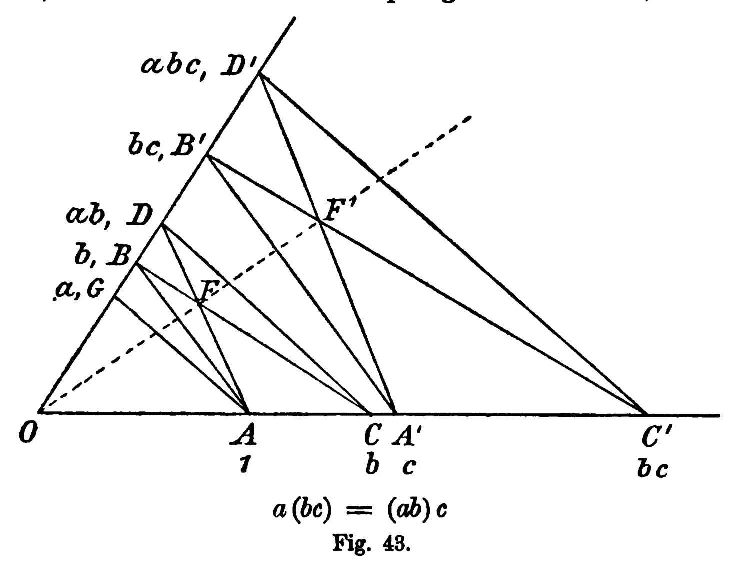
und auf der anderen Geraden die Strecken

$$a = OG \text{ und } b = OB$$

gegeben. Um gemäss der Vorschrift in § 24 der Reihe nach die Strecken

$$bc = OB' \text{ und } bc = OC',$$
$$ab = OD,$$
$$(ab)c = OD'$$

zu construiren, ziehen wir $A'B'$ parallel AB, $B'C'$ parallel BC, CD parallel AG sowie $A'D'$ parallel AD; wie wir sofort erkennen, läuft dann unsere Behauptung darauf hinaus, dass auch



$a(bc) = (ab)c$
Fig. 43.

CD parallel $C'D'$ sein muss. Bezeichnen wir nun den Schnittpunkt der Geraden AD und BC mit F und den Schnittpunkt der

Geraden $A'D'$ und $B'C'$ mit F', so sind in den Dreiecken ABF und $A'B'F'$ die entsprechenden Seiten einander parallel; nach dem Desarguesschen Satze liegen daher die drei Punkte O, F, F' auf einer Geraden. Wegen dieses Umstandes können wir die zweite Aussage des Desarguesschen Satzes auf die beiden Dreiecke CDF und $C'D'F'$ anwenden und erkennen hieraus, dass in der That CD parallel $C'D'$ ist.

Wir beweisen endlich in unserer Streckenrechnung auf Grund des Desarguesschen Satzes die beiden distributiven Gesetze:

$$a(b+c) = ab+ac$$

und

$$(a+b)c = ac+bc.$$

Zum Beweise des ersteren Gesetzes dient die Figur 44[1]). In derselben ist

$$b = OA', \quad c = OC'$$
$$ab = OB', \quad ab = OA'', \quad ac = OC'' \text{ u. s. f.}$$

und es läuft

$B''D_2$ parallel $C''D_1$ parallel zur festen Geraden OA',
$B'D_1$ " $C'D_2$ " " " " OA'';

ferner ist

$$A'A'' \text{ parallel } C'C''$$

und

$$A'B'' \text{ parallel } B'A'' \text{ parallel } F'D_2 \text{ parallel } F''D_1.$$

Die Behauptung läuft darauf hinaus, dass dann auch

$$F'F'' \text{ parallel } A'A'' \text{ und } C'C''$$

sein muss.

Wir construiren folgende Hülfslinien:

$F''J$ parallel der festen Geraden OA',
$F'J$ " " " " OA'';

die Schnittpunkte der Geraden $C''D_1$ und $C'D_2$, $C''D_1$ und $F'J$, $C'D_2$ und $F''J$ heissen G, H_1, H_2; endlich erhalten wir noch die weiteren in der Figur 44 punktirten Hülfslinien durch Verbindung bereits construirter Punkte.

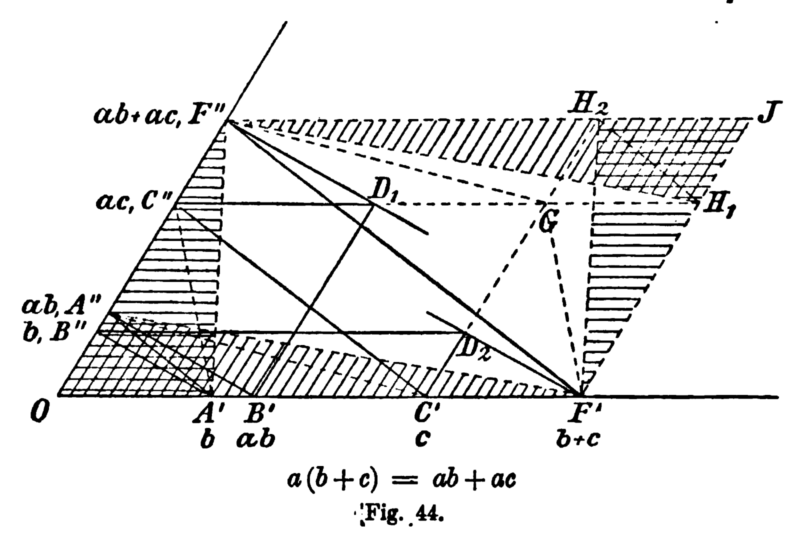
In den beiden Dreiecken $A'B''C''$ und $F'D_2G$ laufen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken einander parallel; nach

1) Die Figuren 44, 45 und 47 hat Herr Dr. *von Schaper* entworfen und auch die zugehörigen Beweise ausgeführt.

der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes folgt daher, dass

$$A'C'' \text{ parallel } F'G$$

sein muss. In den beiden Dreiecken $A'C''F''$ und $F'GH_2$ laufen



$$a(b+c) = ab + ac$$

Fig. 44.

ebenfalls die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken einander parallel; wegen der vorhin gefundenen Thatsache folgt nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes, dass

$$A'F'' \text{ parallel } F'H_2$$

sein muss. Da somit in den beiden wagerecht schraffirten Dreiecken $OA'F''$ und JH_2F' die entsprechenden Seiten parallel sind, so lehrt der Desarguessche Satz, dass die drei Verbindungsgeraden

$$OJ, \quad A'H_2, \quad F''F'$$

sich in einem und demselben Punkte, etwa in P, treffen.

Auf dieselbe Weise finden wir, dass auch

$$A''F' \text{ parallel } F''H_1$$

sein muss und da somit in den beiden schräg schraffierten Dreiecken $OA''F'$ und JH_1F'' die entsprechenden Seiten parallel laufen, so treffen sich dem Desarguesschen Satze zufolge die drei Verbindungsgeraden

$$OJ, \quad A''H_1, \quad F'F''$$

ebenfalls in einem Punkte — dem Punkte P.

Nunmehr laufen für die Dreiecke $OA'A''$ und JH_2H_1 die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt

P, und mithin folgt, dass

$$H_1 H_2 \text{ parallel } A'A''$$

sein muss; mithin ist auch

$$H_1 H_2 \text{ parallel } C'C''.$$

Endlich betrachten wir die Figur $F''H_2C'C''H_1F'F''$. Da in derselben

$$\begin{array}{lllll} F''H_2 & \text{parallel} & C'F' & \text{parallel} & C''H_1 \\ H_2C' & \text{"} & F''C'' & \text{"} & H_1F' \\ C'C'' & \text{"} & H_1H_2 & & \end{array}$$

ausfällt, so erkennen wir hierin die Figur 41 wieder, die wir in § 25 zum Beweise für das commutative Gesetz der Addition benutzt haben. Die entsprechenden Schlüsse wie dort zeigen dann, dass

$$F'F''' \text{ parallel } H_1H_2$$

sein muss und da mithin auch

$$F'F'' \text{ parallel } A'A''$$

ausfällt, so ist der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht.

Zum Beweise der zweiten Formel des distributiven Gesetzes dient die völlig verschiedene Figur 45. In derselben ist

$$1 = OD, \quad a = OA, \quad a = OB, \quad b = OG, \quad c = OD'$$
$$ac = OA', \quad ac = OB', \quad bc = OG' \text{ u. s. f.}$$

und es läuft

$$\begin{array}{llllll} GH & \text{parallel} & G'H' & \text{parallel zur festen Geraden} & OA, \\ AH & \text{"} & A'H' & \text{" " " "} & OB \end{array}$$

und ferner

$$\begin{array}{lll} AB & \text{parallel} & A'B', \\ BD & \text{"} & B'D', \\ DG & \text{"} & D'G', \\ HJ & \text{"} & H'J'. \end{array}$$

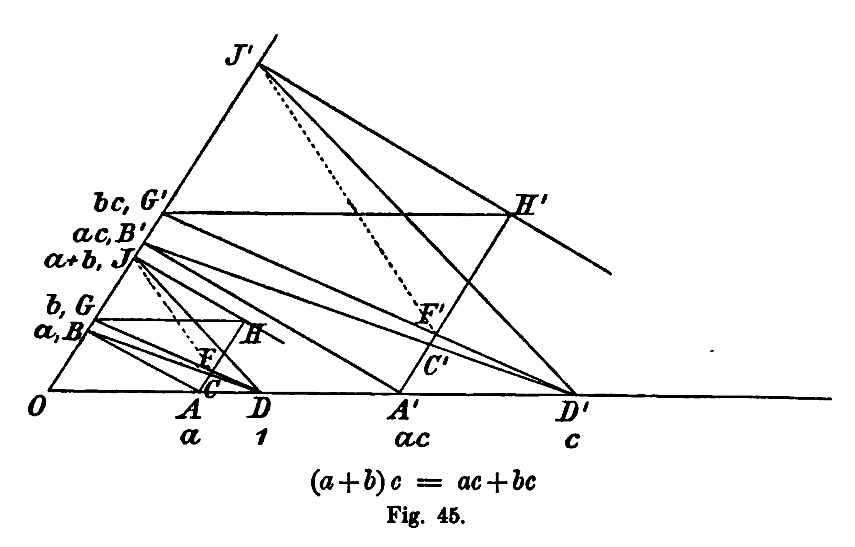
Die Behauptung läuft darauf hinaus, dass dann auch

$$DJ \text{ parallel } D'J'$$

sein muss.

Wir bezeichnen die Punkte, in denen BD und GD die Gerade AH treffen, bez. mit C und F und ferner die Punkte, in denen $B'D'$ und $G'D'$ die Gerade $A'H'$ treffen, bez. mit C' und F';

endlich ziehen wir noch die in der Figur 45 punktirten Hülfslinien FJ und $F'J'$.



$(a+b)c = ac+bc$

Fig. 45.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ laufen die entsprechenden Seiten parallel; mithin liegen nach dem Desarguesschen Satze die drei Punkte O, C, C' auf einer Geraden. Ebenso folgt dann aus der Betrachtung der Dreiecke CDF und $C'D'F'$, dass O, F, F' auf einer Geraden liegen, und die Betrachtung der Dreiecke FGH und $F'G'H'$ lehrt, dass O, H, H' Punkte einer Geraden sind. Nun laufen in den Dreiecken FHJ und $F'H'J'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt O, und mithin sind zufolge der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes die Geraden FJ und $F'J'$ einander parallel. Endlich zeigt dann die Betrachtung der Dreiecke DFJ und $D'F'J'$, dass die Geraden DJ und $D'J'$ einander parallel sind, und damit ist der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht.

§ 27.

Die Gleichung der Geraden auf Grund der neuen Streckenrechnung.

Wir haben in § 24 bis § 26 mittelst der in § 24 angeführten Axiome und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene eine Streckenrechnung eingeführt, in welcher das commutative Gesetz der Addition, die associativen Gesetze der Addition und Multiplikation, sowie die beiden distributiven Gesetze gültig sind. Wir wollen in diesem Paragraphen

zeigen, in welcher Weise auf Grund dieser Streckenrechnung eine analytische Darstellung der Punkte und Geraden in der Ebene möglich ist.

Definition. Wir bezeichnen in der Ebene die beiden angenommenen festen Geraden durch den Punkt O als die X- und Y-Axe und denken uns irgend einen Punkt P der Ebene durch die Strecken x, y bestimmt, die man auf der X- bez. Y-Axe erhält, wenn man durch P zu diesen Axen Parallelen zieht. Diese Strecken x, y heissen *Coordinaten* des Punktes P. Auf Grund der neuen Streckenrechnung und mit Hülfe des Desarguesschen Satzes gelangen wir zu der folgenden Thatsache:

Satz 34. *Die Coordinaten x, y der Punkte auf einer beliebigen Geraden erfüllen stets eine Streckengleichung von der Gestalt:*

$$ax + by + c = 0;$$

in dieser Gleichung stehen die Strecken a, b notwendig linksseitig von den Coordinaten x, y; die Strecken a, b sind niemals beide Null und c ist eine beliebige Strecke.

Umgekehrt: jede Streckengleichung der beschriebenen Art stellt stets eine Gerade in der zu Grunde gelegten ebenen Geometrie dar.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Gerade l gehe durch O. Ferner sei C ein bestimmter von O verschiedener Punkt auf l und P ein beliebiger Punkt auf l; C habe die Coordinaten OA, OB und P habe die Coordinaten x, y; wir bezeichnen die Verbindungsgerade der Endpunkte von x, y mit g. Endlich ziehen wir durch

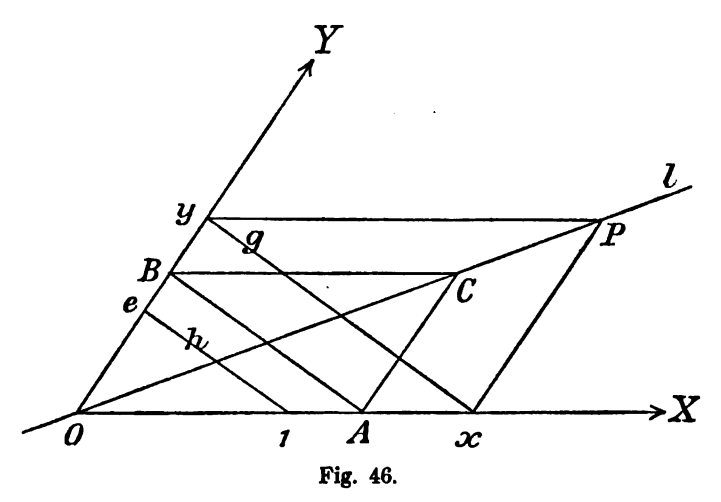


Fig. 46.

den Endpunkt der Strecke 1 auf der X-Axe eine Parallele h zu AB; diese Parallele schneide auf der Y-Axe die Strecke e

ab. Aus der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes folgt leicht, dass die Gerade g stets parallel zu AB läuft. Da somit auch g stets zu h parallel ist, so folgt für die Coordinaten x, y des beliebigen Punktes P auf l die Streckengleichung

$$ex = y.$$

Nunmehr sei l' eine beliebige Gerade in unserer Ebene; dieselbe schneide auf der X-Axe die Strecke $c = OO'$ ab. Wir ziehen ferner die Gerade l durch O parallel zu l'. Es sei P' ein beliebiger Punkt auf l'; die Parallele durch P' zur X-Axe treffe die Gerade l in P und schneide auf der Y-Axe die Strecke $y = OB$ ab; ferner mögen die Parallelen durch P und P' zur Y-Axe auf der X-Axe die Strecken $x = OA$ und $x' = OA'$ abschneiden.

Wir wollen nun beweisen, dass die Streckengleichung

$$x' = x + c$$

besteht. Zu diesem Zwecke ziehen wir $O'C$ parallel zur Einheits-

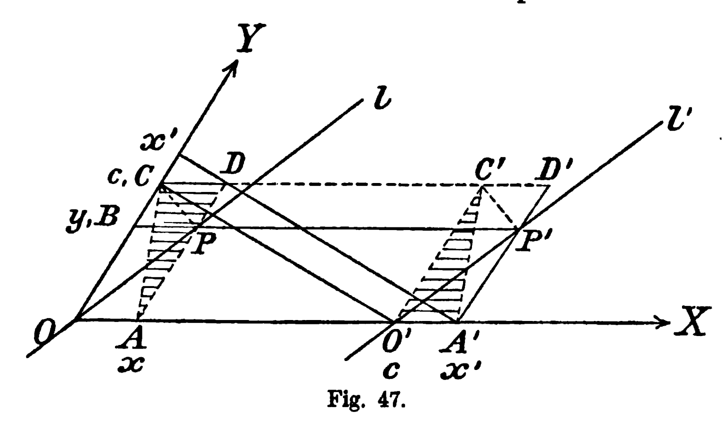


Fig. 47.

geraden, ferner CD parallel zur X-Axe und AD parallel zur Y-Axe; dann läuft unsere Behauptung darauf hinaus, dass

$$A'D \text{ parallel } O'C$$

sein muss. Wir construiren noch D' als Schnittpunkt der Geraden CD und $A'P'$ und ziehen $O'C'$ parallel zur Y-Axe.

Da in den Dreiecken OCP und $O'C'P'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken parallel laufen, so folgt mittelst der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes, dass

$$CP \text{ parallel } C'P'$$

sein muss; auf gleiche Weise lehrt die Betrachtung der Dreiecke

ACP und $A'C'P'$, dass

$$AC \text{ parallel } A'C'$$

ist. Da somit in den Dreiecken ACD und $C'A'O'$ die entsprechenden Seiten einander parallel laufen, so treffen sich die Geraden AC', CA', DO' in einem Punkte und die Betrachtung der beiden Dreiecke $C'A'D$ und ACO' zeigt dann, dass $A'D$ und CO' einander parallel sind.

Aus den beiden bisher gefundenen Streckengleichungen

$$ex = y \quad \text{und} \quad x' = x + c$$

folgt sofort die weitere Gleichung

$$ex' = y + ec.$$

Bezeichnen wir schliesslich mit n die Strecke, die zur Strecke 1 addirt die Strecke 0 liefert, so folgt, wie man leicht beweist, aus der letzten Gleichung

$$ex' + ny + nec = 0$$

und diese Gleichung ist von der Gestalt, wie der Satz 34 behauptet.

Die zweite Aussage des Satzes 34 erkennen wir nun ohne Mühe als richtig; denn eine jede vorgelegte Streckengleichung

$$ax + by + c = 0$$

lässt sich offenbar durch linksseitige Multiplikation mit einer geeigneten Strecke in die vorhin gefundene Gestalt

$$ex + ny + nec = 0$$

bringen.

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, dass bei unseren Annahmen eine Streckengleichung von der Gestalt

$$xa + yb + c = 0,$$

in der die Strecken a, b rechtsseitig von den Coordinaten x, y stehen, im Allgemeinen nicht eine Gerade darstellt.

Wir werden in § 30 eine wichtige Anwendung von dem Satze 34 machen.

§ 28.

Der Inbegriff der Strecken aufgefasst als complexes Zahlensystem.

Wir sehen unmittelbar ein, dass für unsere neue in § 24 begründete Streckenrechnung die Sätze 1—6 in § 13 erfüllt sind.

Ferner haben wir in § 25 und § 26 mit Hülfe des Desarguesschen Satzes erkannt, dass für diese Streckenrechnung die Rechnungsgesetze 7—11 in § 13 gültig sind; es bestehen somit sämtliche Sätze der Verknüpfung, abgesehen vom commutativen Gesetze der Multiplikation.

Um endlich eine Anordnung der Strecken zu ermöglichen, treffen wir folgende Festsetzung. Es seien A, B irgend zwei verschiedene Punkte der Geraden OE; dann bringen wir gemäss Axiom II 4 die vier Punkte O, E, A, B in eine Reihenfolge. Ist dies auf eine der folgenden sechs Arten

$$ABOE,\ AOBE,\ AOEB,\ OABE,\ OAEB,\ OEAB$$

möglich, so nennen wir die Strecke $a = OA$ *kleiner* als die Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$a < b.$$

Findet dagegen eine der sechs Reihenfolgen

$$BAOE,\ BOAE,\ BOEA,\ OBAE,\ OBEA,\ OEBA$$

statt, so nennen wir die Strecke $a = OA$ *grösser* als die Strecke $b = OA$, in Zeichen

$$a > b.$$

Diese Festsetzung bleibt auch in Kraft, wenn A oder B mit O oder E zusammenfallen, nur dass dann die zusammenfallenden Punkte als ein einziger Punkt anzusehen sind und somit lediglich die Anordnung dreier Punkte in Frage kommt.

Wir erkennen leicht, dass nunmehr in unserer Streckenrechnung auf Grund der Axiome II die Rechnungsgesetze 13—16 in § 13 erfüllt sind; somit bildet die Gesamtheit aller verschiedenen Strecken ein complexes Zahlensystem, für welches die Gesetze 1—11, 13—16 in § 13, d. h. die sämtlichen Vorschriften ausser dem commutativen Gesetze der Multiplikation und dem Archimedischen Satze gewiss gültig sind; wir bezeichnen ein solches Zahlensystem im Folgenden kurz als ein *Desarguessches Zahlensystem.*

§ 29.

Aufbau einer räumlichen Geometrie mit Hülfe eines Desarguesschen Zahlensystems.

Es sei nun irgend ein Desarguessches Zahlensystem D vorgelegt; dasselbe ermöglicht uns den Aufbau einer räum-

lichen Geometrie, in der die Axiome I, II, III sämtlich erfüllt sind.

Um dies einzusehen, denken wir uns das System von irgend drei Zahlen (x, y, z) des Desarguesschen Zahlensystems D als einen Punkt und das System von irgend vier Zahlen $(u : v : w : r)$ in D, von denen die ersten drei Zahlen nicht zugleich 0 sind, als eine Ebene; doch sollen die Systeme $(u : v : w : r)$ und $(au : av : aw : ar)$, wo a irgend eine von 0 verschiedene Zahl in D bedeutet, die nämliche Ebene darstellen. Das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

möge ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) auf der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt. Die Gerade endlich definiren wir mit Hülfe eines Systems zweier Ebenen $(u' : v' : w' : r')$ und $(u'' : v'' : w'' : r'')$, wenn es nicht möglich ist, zwei von 0 verschiedene Zahlen a', a'' in D zu finden, sodass gleichzeitig

$$a'u' = a''u'', \quad a'v' = a''v'', \quad a'w' = a''w''$$

wird. Ein Punkt (x, y, z) heisst auf dieser Geraden $[(u' : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')]$ gelegen, wenn er den beiden Ebenen $(u' : v' : w' : r')$ und (u'', v'', w'', r'') gemeinsam ist. Zwei Gerade, welche dieselben Punkte enthalten, gelten als nicht verschieden.

Indem wir die Rechnungsgesetze 1—11 in § 13 anwenden, die nach Voraussetzung für die Zahlen in D gelten sollen, gelangen wir ohne Schwierigkeit zu dem Resultate, dass in der soeben aufgestellten räumlichen Geometrie die Axiome I und III sämtlich erfüllt sind.

Damit auch den Axiomen II der Anordnung Genüge geschehe, treffen wir folgende Festsetzungen. Es seien

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

irgend drei Punkte einer Geraden

$$[(u' : v' : w' : r'), \quad (u'' : v'' : w'' : r'')];$$

dann heisse der Punkt (x_2, y_2, z_2) zwischen den beiden anderen gelegen, wenn wenigstens eine der sechs Doppelungleichungen

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3$$

$$(2) \qquad y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3$$

$$(3) \qquad z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3$$

erfüllt ist. Besteht nun etwa eine der beiden Doppelungleichungen (1), so schliessen wir leicht, dass entweder $y_1 = y_2 = y_3$ oder

notwendig eine der beiden Doppelungleichungen (2) und ebenso dass entweder $z_1 = z_2 = z_3$ oder eine der Doppelungleichungen (3) gelten muss. In der That, aus den Gleichungen

$$u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0,$$
$$u''x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

leiten wir durch linksseitige Multiplikation derselben mit geeigneten Zahlen aus D und durch nachherige Addition der entstehenden Gleichungen ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0 \qquad (4)$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

ab. Hierin ist der Coefficient v''' sicher nicht 0, da sonst die Gleichheit der drei Zahlen x_1, x_2, x_3 folgen würde. Aus

$$x_1 \lesseqgtr x_2 \lesseqgtr x_3$$

schliessen wir

$$u'''x_1 \lesseqgtr u'''x_2 \lesseqgtr u'''x_3$$

und mithin wegen (4)

$$v'''y_1 + r''' \lesseqgtr v'''y_2 + r''' \lesseqgtr v'''y_3 + r'''$$

und daher

$$v'''y_1 \lesseqgtr v'''y_2 \lesseqgtr v'''y_3,$$

und da v''' nicht 0 ist, so haben wir

$$y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr y_3;$$

in jeder dieser Doppelungleichungen soll stets entweder durchweg das obere oder durchweg das mittlere oder durchweg das untere Zeichen gelten.

Die angestellten Ueberlegungen lassen erkennen, dass in unserer Geometrie die linearen Axiome II 1—4 der Anordnung zutreffen. Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass in unserer Geometrie auch das ebene Axiom II 5 gültig ist.

Zu dem Zwecke sei eine Ebene $(u : v : w : r)$ und in ihr eine Gerade $[(u : v : w : r), (u' : v' : w' : r')]$ gegeben. Wir setzen fest, dass alle in der Ebene $(u : v : w : r)$ gelegenen Punkte (x, y, z), für die der Ausdruck $u'x + v'y + w'z + r'$ kleiner oder grösser als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen Seite von jener Geraden gelegen sein sollen, und haben dann zu beweisen, dass diese Fest-

setzung sich mit der vorigen in Uebereinstimmung befindet, was leicht geschehen kann.

Damit haben wir erkannt, dass die sämtlichen Axiome I, II, III in derjenigen räumlichen Geometrie erfüllt sind, die in der oben geschilderten Weise aus dem Desarguesschen Zahlensystem D entspringt. Bedenken wir, dass der Desarguessche Satz eine Folge der Axiome I, II, III ist, so sehen wir, dass die eben gefundene Thatsache die genaue Umkehrung desjenigen Ergebnisses darstellt, zu dem wir in § 28 gelangt sind.

§ 30.

Die Bedeutung des Desarguesschen Satzes.

Wenn in einer ebenen Geometrie die Axiome I 1—2, II, III erfüllt sind und überdies der Desarguessche Satz gilt, so ist es nach § 24 — § 28 in dieser Geometrie stets möglich, eine Streckenrechnung einzuführen, für die die Regeln 1—11, 13—16 in § 13 anwendbar sind. Wir betrachten nun weiter den Inbegriff dieser Strecken als ein complexes Zahlensystem und bauen aus denselben nach den Entwickelungen in § 29 eine räumliche Geometrie auf, in der sämtliche Axiome I, II, III gültig sind.

Fassen wir in dieser räumlichen Geometrie lediglich die Punkte $(x, y, 0)$ und diejenigen Geraden ins Auge, auf denen nur solche Punkte liegen, so entsteht eine ebene Geometrie, und wenn wir die in § 27 abgeleitete Thatsache berücksichtigen, so leuchtet ein, dass diese ebene Geometrie genau mit der zu Anfang vorgelegten ebenen Geometrie übereinstimmen muss. Damit gewinnen wir folgenden Satz, der als das Endziel der gesamten Entwickelungen dieses Kapitels V anzusehen ist:

Satz 35. *Es seien in einer ebenen Geometrie die Axiome* I 1—2, II, III *erfüllt: dann ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese ebene Geometrie sich auffassen lässt als ein Teil einer räumlichen Geometrie, in welcher die sämtlichen Axiome* I, II, III *erfüllt sind.*

Der Desarguessche Satz kennzeichnet sich so gewissermassen für die ebene Geometrie als das Resultat der Elimination der räumlichen Axiome.

Die gefundenen Resultate setzen uns auch in den Stand zu erkennen, dass jede räumliche Geometrie, in der die Axiome I, II, III sämtlich erfüllt sind, sich stets als ein Teil einer „Geometrie von beliebig vielen Dimensionen" auffassen lässt; dabei ist

unter einer Geometrie von beliebig vielen Dimensionen eine Gesamtheit von Punkten, Geraden, Ebenen und noch weiteren linearen Elementen zu verstehen, für welche die entsprechenden Axiome der Verknüpfung und Anordnung sowie das Parallelenaxiom erfüllt sind.

Kapitel VI.

Der Pascalsche Satz.

§ 31.

Zwei Sätze über die Beweisbarkeit des Pascalschen Satzes.

Der Desarguessche Satz (Satz 32) lässt sich bekanntlich aus den Axiomen I, II, III, d. h. unter wesentlicher Benutzung der räumlichen Axiome beweisen; in § 23 habe ich gezeigt, dass der Beweis desselben ohne die räumlichen Axiome der Gruppe I und ohne die Congruenzaxiome IV nicht möglich ist, selbst wenn die Benutzung des Archimedischen Axioms gestattet wird.

In § 14 ist der Pascalsche Satz (Satz 21) und damit nach § 22 auch der Desarguessche Satz aus den Axiomen I 1—2, II—IV, also mit Ausschluss der räumlichen Axiome und unter wesentlicher Benutzung der Congruenzaxiome abgeleitet worden. Es entsteht die Frage, ob auch der Pascalsche Satz ohne Hinzuziehung der Congruenzaxiome bewiesen werden kann. Unsere Untersuchung wird zeigen, dass in dieser Hinsicht der Pascalsche Satz sich völlig anders als der Desarguessche Satz verhält, indem bei dem Beweise des Pascalschen Satzes die Zulassung oder Ausschliessung des Archimedischen Axioms von entscheidendem Einflusse für seine Gültigkeit ist. Die wesentlichen Ergebnisse unserer Untersuchung fassen wir in den folgenden zwei Sätzen zusammen:

Satz 36. *Der Pascalsche Satz* (Satz 21) *ist beweisbar auf Grund der Axiome* I, II, III, V, *d. h. unter Ausschliessung der Congruenzaxiome mit Zuhülfenahme des Archimedischen Axioms.*

Satz 37. *Der Pascalsche Satz* (Satz 21) *ist nicht beweisbar auf Grund der Axiome* I, II, III, *d. h. unter Ausschliessung der Congruenzaxiome sowie des Archimedischen Axioms.*

In der Fassung dieser beiden Sätze können nach dem allge-

meinen Satze 35 die räumlichen Axiome I 3—7 auch durch die ebene Forderung ersetzt werden, dass der Desarguessche Satz (Satz 32) gelten soll.

§ 32.

Das commutative Gesetz der Multiplikation im Archimedischen Zahlensystem.

Die Beweise der Sätze 36 und 37 beruhen wesentlich auf gewissen gegenseitigen Beziehungen, welche für die Rechnungsregeln und Grundthatsachen der Arithmetik bestehen und deren Kenntnis auch an sich von Interesse erscheint. Wir stellen die folgenden zwei Sätze auf:

Satz 38. *Für ein Archimedisches Zahlensystem ist das commutative Gesetz der Multiplikation eine notwendige Folge der übrigen Rechnungsgesetze*; *d. h., wenn ein Zahlensystem die in* § 13 *aufgezählten Eigenschaften* 1—11, 13—17 *besitzt, so folgt notwendig, dass dasselbe auch der Formel* 12 *genügt.*

Beweis. Zunächst bemerken wir: wenn a eine beliebige Zahl des Zahlensystems und

$$n = 1+1+\cdots+1$$

eine ganze rationale positive Zahl ist, so gilt für a und n stets das commutative Gesetz der Multiplikation; es ist nämlich

$$an = a(1+1+\cdots+1) = a\cdot 1+a\cdot 1+\cdots+a\cdot 1 = a+a+\cdots+a$$

und ebenso

$$na = (1+1+\cdots+1)a = 1\cdot a+1\cdot a+\cdots+1\cdot a = a+a+\cdots+a$$

Es seien nun im Gegensatz zu unserer Behauptung a, b solche zwei Zahlen des Zahlensystems, für welche das commutative Gesetz der Multiplikation nicht gültig ist. Wir dürfen dann, wie leicht ersichtlich, die Annahmen

$$a>0, \quad b>0 \qquad ab-ba>0$$

machen. Wegen der Forderung 6 in § 13 giebt es eine Zahl $c\,(>0)$, so dass

$$(a+b+1)\,c = ab-ba$$

ist. Endlich wählen wir eine Zahl d, die zugleich den Ungleichungen

$$d>0, \quad d<1, \quad d<c$$

genügt, und bezeichnen mit m und n zwei solche ganze rationale

Zahlen $\geqq 0$, für die

$$md < a \leqq (m+1)\,d$$

bez.

$$nd < b \leqq (n+1)\,d$$

wird. Das Vorhandensein solcher Zahlen m, n ist eine unmittelbare Folgerung des Archimedischen Satzes (Satz 17 in § 13). Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Anfang dieses Beweises erhalten wir aus den letzteren Ungleichungen durch Multiplikation

$$ab \leqq mnd^2 + (m+n+1)\,d^2,$$
$$ba > mnd^2,$$

also durch Subtraktion

$$ab - ba \leqq (m+n+1)\,d^2.$$

Nun ist

$$md < a, \quad nd < b, \quad d < 1$$

und folglich

$$(m+n+1)\,d < a+b+1,$$

d. h.

$$ab - ba < (a+b+1)\,d$$

oder wegen $d < c$

$$ab - ba < (a+b+1)\,c.$$

Diese Ungleichung widerspricht der Bestimmung der Zahl c, und damit ist der Beweis für den Satz 38 erbracht.

§ 33.

Das commutative Gesetz der Multiplikation im Nicht-Archimedischen Zahlensystem.

Satz 39. *Für ein Nicht-Archimedisches Zahlensystem ist das commutative Gesetz der Multiplikation* **nicht** *eine notwendige Folge der übrigen Rechnungsgesetze; d. h. es giebt ein Zahlensystem, das die in* § 13 *aufgezählten Eigenschaften* 1—11, 13—16 *besitzt — ein Desarguessches Zahlensystem nach* § 28 —, *in welchem* **nicht** *das commutative Gesetz* (12) *der Multiplikation besteht.*

Beweis. Es sei t ein Parameter und T irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \cdots;$$

darin mögen $r_0 (\neq 0), r_1, r_2, \ldots$ beliebige rationale Zahlen bedeuten und n sei eine beliebige ganze rationale Zahl $\gtreqless 0$. Ferner sei s ein anderer Parameter und S irgend ein Ausdruck mit einer

endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \cdots;$$

darin mögen $T_0 (\neq 0)$, T_1, $T_2, \ldots$ beliebige Ausdrücke von der Gestalt T bezeichnen und m sei wiederum eine beliebige ganze rationale Zahl $\gtreqless 0$. Die Gesamtheit aller Ausdrücke von der Gestalt S sehen wir als ein complexes Zahlensystem $\Omega(s, t)$ an, in dem wir folgende Rechnungsregeln festsetzen: man rechne mit s und t, wie mit Parametern nach den Regeln 7—11 in § 13, während man an Stelle der Regel 12 stets die Formel

$$ts = -st \tag{1}$$

anwende.

Sind nun S', S'' irgend zwei Ausdrücke von der Gestalt S:

$$S' = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \cdots,$$
$$S'' = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \cdots,$$

so kann man offenbar durch Zusammenfügung einen neuen Ausdruck $S' + S''$ bilden, der wiederum von der Gestalt S und zugleich eindeutig bestimmt ist; dieser Ausdruck $S' + S''$ heisst die Summe der durch S', S'' dargestellten Zahlen.

Durch gliedweise Multiplikation der beiden Ausdrücke S', S'' gelangen wir zunächst zu einem Ausdrucke von der Gestalt

$$S'S'' = s^{m'} T'_0 s^{m''} T''_0 + (s^{m'} T'_0 s^{m''+1} T''_1 + s^{m'+1} T'_1 s^{m''} T''_0)$$
$$+ (s^{m'} T'_0 s^{m''+2} T''_2 + s^{m'+1} T'_1 s^{m''+1} T''_1 + s^{m'+2} T'_2 s^{m''} T''_0) + \cdots.$$

Dieser Ausdruck wird bei Benutzung der Formel (1) offenbar ein eindeutig bestimmter Ausdruck von der Gestalt S; der letztere heisse das Produkt der durch S' dargestellten Zahl in die durch S'' dargestellte Zahl.

Bei der so festgesetzten Rechnungsweise leuchtet die Gültigkeit der Rechnungsregeln 1—5 in § 13 unmittelbar ein. Auch die Gültigkeit der Vorschrift 6 in § 13 ist nicht schwer einzusehen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es seien etwa

$$S' = s^{m'} T'_0 + s^{m'+1} T'_1 + s^{m'+2} T'_2 + \cdots$$

und

$$S'' = s^{m''} T''_0 + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \cdots$$

gegebene Ausdrücke von der Gestalt S, und bedenken, dass unseren Festsetzungen entsprechend der erste Coefficient r'_0 aus T'_0 von 0 verschieden sein muss. Indem wir nun die nämlichen Po-

tenzen von s auf beiden Seiten einer Gleichung

$$S'S'' = S''' \tag{2}$$

vergleichen, finden wir in eindeutig bestimmter Weise zunächst eine ganze Zahl m'' als Exponenten und sodann der Reihe nach gewisse Ausdrücke

$$T_0'', T_1'', T_2'', \ldots$$

derart, dass der Ausdruck

$$S'' = s^{m''}T_0'' + s^{m''+1}T_1'' + s^{m''+2}T_2'' + \cdots$$

bei Benutzung der Formel (1) der Gleichung (2) genügt; hiermit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Um endlich die Anordnung der Zahlen unseres Zahlensystems $\Omega(s, t)$ zu ermöglichen, treffen wir folgende Festsetzungen. Eine Zahl des Systems heisse $<$ oder >0, jenachdem in dem Ausdrucke S, der sie darstellt, der erste Coefficient r_0 von $T_0 <$ oder >0 ausfällt. Sind irgend zwei Zahlen a und b des complexen Zahlensystems vorgelegt, so heisse $a<b$ bez. $a>b$, jenachdem $a-b<0$ oder >0 wird. Es leuchtet unmittelbar ein, dass bei diesen Festsetzungen die Regeln 13—16 in § 13 gültig sind, d. h. $\Omega(s, t)$ ist ein Desarguessches Zahlensystem (vgl. § 28).

Die Vorschrift 12 in § 13 ist, wie Gleichung (1) zeigt, für unser complexes Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht erfüllt und damit ist die Richtigkeit des Satzes 39 vollständig erkannt.

In Uebereinstimmung mit Satz 38 gilt der Archimedische Satz (Satz 17 in § 13) für das soeben aufgestellte Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht.

Es werde noch hervorgehoben, dass das Zahlensystem $\Omega(s, t)$ — ebenso wie die in § 9 und § 12 benutzten Zahlensysteme Ω und $\Omega(t)$ — nur eine abzählbare Menge von Zahlen enthält.

§ 34.

Beweis der beiden Sätze über den Pascalschen Satz. (Nicht-Pascalsche Geometrie.)

Wenn in einer räumlichen Geometrie die sämtlichen Axiome I, II, III erfüllt sind, so gilt auch der Desarguessche Satz (Satz 32) und mithin ist nach Kapitel V § 24 bis § 26 in dieser Geometrie die Einführung einer Streckenrechnung möglich, für welche die Vorschriften 1—11, 13—16 in § 13 gültig sind. Setzen wir nun das Archimedische Axiom V in unserer Geometrie voraus, so gilt

offenbar für die Streckenrechnung der Archimedische Satz (Satz 17 in § 13) und mithin nach Satz 38 auch das commutative Gesetz der Multiplikation. Da aber die hier in Rede stehende in § 24 (Fig. 40) eingeführte Definition des Streckenproduktes mit der in § 15 (Fig. 21) angewandten Definition übereinstimmt, so bedeutet gemäss der in § 15 ausgeführten Construktion das commutative Gesetz der Multiplikation zweier Strecken auch hier nichts anderes als den Pascalschen Satz. Damit ist die Richtigkeit des Satzes 36 erkannt.

Um den Satz 37 zu beweisen, fassen wir das in § 33 aufgestellte Desarguessche Zahlensystem $\Omega(s, t)$ ins Auge und construiren mit Hülfe desselben auf die in § 29 beschriebene Art eine räumliche Geometrie, in der die sämtlichen Axiome I, II, III erfüllt sind. Trotzdem gilt der Pascalsche Satz in dieser Geometrie nicht, da das commutative Gesetz der Multiplikation in dem Desarguesschen Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht besteht. Die so aufgebaute *„Nicht-Pascalsche" Geometrie* ist in Uebereinstimmung mit dem vorhin bewiesenen Satz 36 notwendig zugleich auch eine *„Nicht-Archimedische" Geometrie.*

Es ist offenbar, dass der Pascalsche Satz sich bei unseren Annahmen auch dann nicht beweisen lässt, wenn man die räumliche Geometrie als einen Teil einer Geometrie von beliebig vielen Dimensionen auffasst, in welcher neben den Punkten, Geraden und Ebenen noch weitere lineare Elemente vorhanden sind und für diese ein entsprechendes System von Axiomen der Verknüpfung und Anordnung, sowie das Parallelenaxiom zu Grunde gelegt wird.

§ 35.

Beweis eines beliebigen Schnittpunktsatzes mittelst des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes.

Ein jeder ebener Schnittpunktsatz hat notwendig diese Form: Man wähle zunächst ein System von Punkten und Geraden willkürlich, bez. mit der Bedingung, dass für gewisse von diesen Punkten und Geraden die vereinigte Lage vorgeschrieben ist; wenn man dann in bekannter Weise Verbindungsgerade und Schnittpunkte construirt, so gelangt man schliesslich zu einem bestimmten System von drei Geraden, von denen der Satz aussagt, dass sie durch den nämlichen Punkt hindurchlaufen.

Es sei nun eine ebene Geometrie vorgelegt, in der sämtliche Axiome I 1—2, II—V gültig sind; nach Kap. III § 17 können wir dann vermittelst eines rechtwinkligen Axenkreuzes jedem Punkte ein Zahlenpaar (x, y) und jeder Geraden ein Verhältnis

von drei Zahlen $(u : v : w)$ entsprechen lassen; hierbei sind x, y, u, v, w jedenfalls reelle Zahlen, von denen u, v nicht beide verschwinden, und die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Geraden

$$ux + vy + w = 0$$

bedeutet eine Gleichung im gewöhnlichen Sinne. Umgekehrt dürfen wir, falls x, y, u, v, w Zahlen des in § 9 construirten algebraischen Bereiches Ω sind und u, v nicht beide verschwinden, gewiss annehmen, dass das Zahlenpaar (x, y) und das Zahlentripel $(u : v : w)$ einen Punkt bez. eine Gerade in der vorgelegten Geometrie liefert.

Führen wir für alle Punkte und Geraden, die in einem beliebigen ebenen Schnittpunktsatze auftreten, die betreffenden Zahlenpaare und Zahlentripel ein, so wird dieser Schnittpunktsatz aussagen, dass ein bestimmter, von gewissen Parametern $p_1, \ldots, p_r$ rational abhängiger Ausdruck $A(p_1, \ldots, p_r)$ mit reellen Coefficienten stets verschwindet, sobald wir für jene Parameter irgend welche Zahlen des in § 9 betrachteten Bereiches Ω einsetzen. Wir schliessen hieraus, dass der Ausdruck $A(p_1, \ldots, p_r)$ auch identisch auf Grund der Rechnungsgesetze 7—12 in § 13 verschwinden muss.

Da in der vorgelegten Geometrie nach § 22 der Desarguessche Satz gilt, so können wir gewiss auch die in § 24 eingeführte Streckenrechnung benutzen, und wegen der Gültigkeit des Pascalschen Satzes trifft für diese Streckenrechnung auch das commutative Gesetz der Multiplikation zu, sodass in dieser Streckenrechnung sämtliche Rechnungsgesetze 7—12 in § 13 gültig sind.

Indem wir die Axen des bisher benutzten Axenkreuzes auch als Axen dieser neuen Streckenrechnung gewählt und die Einheitspunkte E und E' geeignet festgesetzt denken, erkennen wir die Uebereinstimmung der neuen Streckenrechnung mit der früheren Coordinatenrechnung.

Um in der neuen Streckenrechnung das identische Verschwinden des Ausdruckes $A(p_1, \ldots, p_r)$ nachzuweisen, genügt die Anwendung des Desarguesschen und Pascalschen Satzes und damit erkennen wir, dass jeder in der vorgelegten Geometrie geltende Schnittpunktsatz durch Konstruktion geeigneter Hülfspunkte und Hülfsgeraden sich stets als eine Kombination des Desarguesschen und Pascalschen Satzes herausstellen muss. Zum Nachweise der Richtigkeit des Schnittpunktsatzes brauchen wir also nicht auf die Congruenzsätze zurückzugreifen.

Kapitel VII.

Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—V.

§ 36.

Die geometrischen Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers.

Es sei eine räumliche Geometrie vorgelegt, in der die sämtlichen Axiome I—V gelten; wir fassen der Einfachheit wegen in diesem Kapitel eine ebene Geometrie ins Auge, die in dieser räumlichen Geometrie enthalten ist, und untersuchen dann die Frage, welche elementaren Konstruktionsaufgaben in einer solchen Geometrie notwendig ausführbar sind.

Auf Grund der Axiome I ist die Ausführung der folgenden Aufgabe stets möglich:

Aufgabe 1. Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden, falls die Geraden nicht parallel sind.

Das Axiom III ermöglicht die Ausführung der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 2. Durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

Auf Grund der Congruenzaxiome IV ist das Abtragen von Strecken und Winkeln möglich, d. h. es lassen sich in der vorgelegten Geometrie folgende Aufgaben lösen:

Aufgabe 3. Eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden von einem Punkte aus abzutragen.

Aufgabe 4. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade anzutragen oder eine Gerade zu konstruiren, die eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Auf Grund der Axiome der Gruppen II und V werden keine neuen Aufgaben lösbar; wir sehen somit, dass unter ausschliesslicher Benutzung der Axiome I—V alle und nur diejenigen Konstruktionsaufgaben lösbar sind, die sich auf die eben genannten Aufgaben 1—4 zurückführen lassen.

Wir fügen den fundamentalen Aufgaben 1—4 noch die folgende hinzu:

Aufgabe 5. Zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.

Wir erkennen unmittelbar, dass diese Aufgabe 5 auf verschiedene Arten durch die Aufgaben 1—4 gelöst werden kann.

Zur Ausführung der Aufgabe 1 bedürfen wir des Lineals. Ein Instrument, welches zur Ausführung der Aufgabe 3 dient d. h. das Abtragen einer Strecke auf einer gegebenen Geraden ermöglicht, nennen wir einen Streckenübertrager. Wir wollen nunmehr zeigen, dass die Aufgaben 2, 4 und 5 auf die Lösung der Aufgaben 1 und 3 zurückgeführt werden können, und mithin die sämtlichen Aufgaben 1—5 lediglich mittelst Lineals und Streckenübertragers lösbar sind. Wir finden damit folgendes Resultat:

Satz 40. *Diejenigen geometrischen Konstruktionsaufgaben, die unter ausschliesslicher Benutzung der Axiome* I—V *lösbar sind, lassen sich notwendig mittelst Lineals und Streckenübertragers ausführen.*

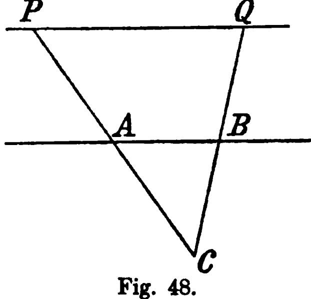


Fig. 48.

Beweis. Um die Aufgabe 2 auf die Aufgaben 1 und 3 zurückzuführen, verbinden wir den gegebenen Punkt P mit irgend einem Punkte A der gegebenen Geraden und verlängern PA über A hinaus um sich selbst bis C. Sodann verbinden wir C mit irgend einem andern Punkte B der gegebenen Geraden und verlängern CB über B hinaus um sich selbst bis Q; die Gerade PQ ist die gesuchte Parallele.

Die Aufgabe 5 lösen wir auf folgende Weise. Es sei A ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden; dann tragen wir von A aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin zwei gleiche Strecken AB und AC ab und bestimmen dann auf zwei beliebigen anderen

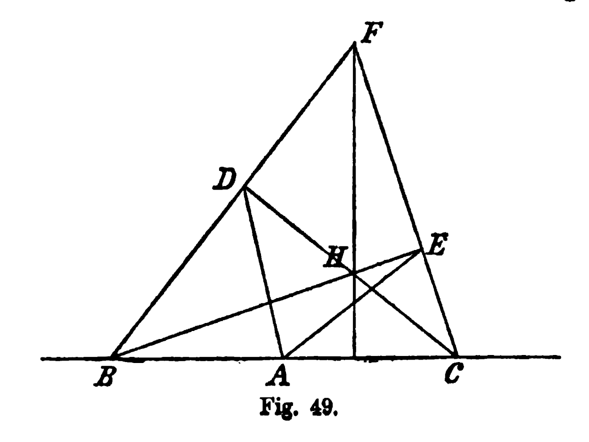


Fig. 49.

durch A gehenden Geraden die Punkte E und D, so dass auch die Strecken AD und AE den Strecken AB und AC gleich werden. Die Geraden BD und CE mögen sich in F, die Geraden BE und CD in H schneiden: dann ist FH die gesuchte Senkrechte. In der That: die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BEC$ sind als Winkel im Halbkreise über BC Rechte und daher steht nach dem Satze vom Höhenschnittpunkt eines Dreieckes, auf das Dreieck BCF angewandt, auch FH auf BC senkrecht.

Wir können nunmehr leicht auch die Aufgabe 4 allein mittelst Ziehens von Geraden und Abtragens von Strecken lösen; wir schlagen etwa folgendes Verfahren ein, welches nur das Ziehen von Parallelen und Fällen von Loten erfordert. Es sei β der abzutragende Winkel und A der Scheitel dieses Winkels. Wir ziehen die Gerade l durch A parallel zu der gegebenen Geraden, an welche der gegebene Winkel β angetragen werden soll. Von einem beliebigen Punkte B eines Schenkels von β fällen wir Lote auf den anderen Schenkel des Winkels β und auf l. Die Fusspunkte dieser Lote seien D und C. Das Fällen von Loten geschieht vermöge der Aufgaben 2 und 5.

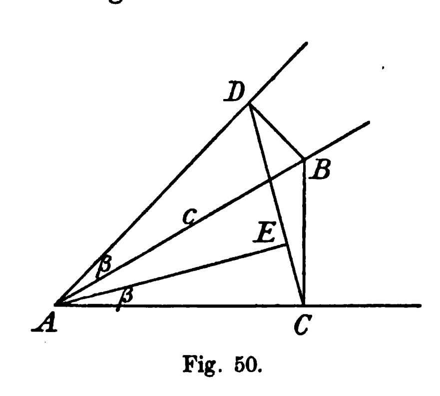


Fig. 50.

Sodann fällen wir von A eine Senkrechte auf CD, ihr Fusspunkt sei E. Nach dem in § 14 ausgeführten Beweise ist $\sphericalangle CAE = \beta$; die Aufgabe 4 ist somit ebenfalls auf die Aufgaben 1 und 3 zurückgeführt und damit der Satz 40 vollständig bewiesen.

§ 37.

Analytische Darstellung der Coordinaten konstruirbarer Punkte.

Ausser den in § 36 behandelten elementargeometrischen Aufgaben giebt es noch eine grosse Reihe weiterer Aufgaben, zu deren Lösung man lediglich das Ziehen von Geraden und das Abtragen von Strecken nötig hat. Um den Bereich aller auf diese Weise lösbaren Aufgaben überblicken zu können, legen wir bei der weiteren Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und denken uns die Coordinaten der Punkte in der üblichen Weise als reelle Zahlen oder Funktionen von gewissen

willkürlichen Parametern. Um die Frage nach der Gesamtheit aller konstruirbaren Punkte zu beantworten, stellen wir folgende Betrachtung an:

Es sei ein System von bestimmten Punkten gegeben; wir setzen aus den Coordinaten dieser Punkte einen Bereich R zusammen; derselbe enthält gewisse reelle Zahlen und gewisse willkürliche Parameter p. Nunmehr denken wir uns die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, die durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken aus dem vorgelegten System von Punkten konstruirbar sind. Der Bereich, der von den Coordinaten dieser Punkte gebildet wird, heisse $\Omega(R)$; derselbe enthält gewisse reelle Zahlen und Funktionen der willkürlichen Parameter p.

Unsere Betrachtungen in § 17 zeigen, dass das Ziehen von Geraden und Parallelen analytisch auf die Anwendung der Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division von Strecken hinausläuft; ferner lehrt die bekannte in § 9 aufgestellte Formel für die Drehung, dass das Abtragen von Strecken auf einer beliebigen Geraden keine andere analytische Operation erfordert, als die Quadratwurzel zu ziehen aus einer Summe von zwei Quadraten, deren Basen man bereits konstruirt hat. Umgekehrt kann man zufolge des Pythagoräischen Lehrsatzes vermöge eines rechtwinkligen Dreiecks die Quadratwurzel aus der Summe zweier Streckenquadrate durch Abtragen von Strecken stets konstruiren.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass der Bereich $\Omega(R)$ alle diejenigen und nur solche reellen Zahlen und Funktionen der Parameter p enthält, die aus den Zahlen und Parametern in R vermöge einer endlichen Anzahl von Anwendungen von fünf Rechnungsoperationen, nämlich der vier elementaren Rechnungsoperationen hervorgehen, wenn man noch das Ziehen der Quadratwurzel aus einer Summe zweier Quadrate als fünfte Rechnungsoperation zulässt. Wir sprechen dieses Resultat wie folgt aus:

Satz 41. Eine geometrische Konstruktionsaufgabe ist dann und nur dann durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken, d. h. mittels Lineals und Streckenübertragers lösbar, wenn bei der analytischen Behandlung der Aufgabe die Coordinaten der gesuchten Punkte solche Funktionen der Coordinaten der gegebenen Punkte sind, deren Herstellung nur rationale Operationen und die Operation des Ziehens der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate erfordert.

Wir können aus diesem Satze sofort erkennen, dass nicht jede mittelst Zirkels lösbare Aufgabe auch allein mittelst Lineals und Streckenübertragers gelöst werden kann. Zu dem Zwecke

legen wir diejenige Geometrie zu Grunde, die in § 9 mit Hilfe des algebraischen Zahlenbereichs Ω aufgebaut worden ist; in dieser Geometrie giebt es lediglich solche Strecken, die mittelst Lineals und Streckenübertragers konstruirbar sind, nämlich die durch Zahlen des Bereichs Ω bestimmten Strecken.

Ist nun ω irgend eine Zahl in Ω, so erkennen wir aus der Definition des Bereichs Ω leicht, dass auch jede zu ω conjugirte algebraische Zahl in Ω liegen muss, und da die Zahlen des Bereichs Ω offenbar sämtlich reell sind, so folgt hieraus, dass der Bereich Ω nur solche reelle algebraische Zahlen enthalten kann, deren Conjugirte ebenfalls reell sind.

Wir stellen jetzt die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und einer Kathete $|\sqrt{2}|-1$ zu konstruiren. Nun kommt die algebraische Zahl $\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}$, die den Zahlenwert der anderen Kathete ausdrückt, im Zahlenbereich Ω nicht vor, da die zu ihr konjugirte Zahl $\sqrt{-2|\sqrt{2}|-2}$ imaginär ausfällt. Die gestellte Aufgabe ist mithin in der zu Grunde gelegten Geometrie nicht lösbar, und kann daher überhaupt nicht mittelst Lineals und Streckenübertragers lösbar sein, obwohl die Konstruktion mittelst des Zirkels sofort ausführbar ist.

§ 38.

Die Darstellung algebraischer Zahlen und ganzer rationaler Funktionen als Summe von Quadraten.

Die Frage nach der Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers erfordert zu ihrer weiteren Behandlung einige Sätze zahlentheoretischen und algebraischen Charakters, die, wie mir scheint, auch an sich von Interesse sind.

Nach *Fermat* ist bekanntlich jede ganze rationale positive Zahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Dieser Fermatsche Satz gestattet eine merkwürdige Verallgemeinerung von folgender Art:

Definition. Es sei k ein beliebiger Zahlkörper; der Grad dieses Körpers k heisse m, und die $m-1$ zu k konjugirten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Trifft es sich, dass unter den m Körpern $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ einer oder mehrere aus lauter reellen Zahlen gebildet sind, so nennen wir diese

Körper selbst reell; es seien diese Körper etwa $k, k', \ldots k^{(s-1)}$. Eine Zahl α des Körpers k heisst in diesem Falle *total positiv in* k, falls die s zu α konjugirten bez. in $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Zahlen sämtlich positiv sind. Kommen dagegen in jedem der m Körper $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ auch imaginäre Zahlen vor, so heisst eine jede Zahl α in k stets *total positiv.*

Satz 42. *Jede total positive Zahl in k lässt sich als Summe von vier Quadraten darstellen, deren Basen ganze oder gebrochene Zahlen des Körpers k sind.*

Der Beweis dieses Satzes bietet erhebliche Schwierigkeiten dar; er beruht wesentlich auf der Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, die ich unlängst in mehreren Arbeiten [1]) entwickelt habe. Es sei hier nur auf denjenigen Satz aus dieser Theorie hingewiesen, der die Bedingungen für die Lösbarkeit einer ternären Diophantischen Gleichung von der Gestalt

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 = 0$$

angiebt, worin die Coefficienten α, β, γ gegebene Zahlen in k und ξ, η, ζ gesuchte Zahlen in k bedeuten. Der Beweis des Satzes 42 wird durch wiederholte Anwendung des eben genannten Satzes erbracht.

Aus dem Satze 42 folgen eine Reihe von Sätzen über die Darstellung solcher rationaler Funktionen einer Veränderlichen mit rationalen Coefficienten, die niemals negative Werte haben; ich hebe nur den folgenden Satz hervor, der uns im nächsten Paragraphen von Nutzen sein wird.

Satz 43. Es bedeute $f(x)$ eine solche ganze rationale Funktion von x mit rationalen Zahlencoefficienten, die niemals negative Werte annimmt, wenn man für x beliebige reelle Werte einsetzt: dann lässt sich $f(x)$ stets als Quotient zweier Summen von Quadraten darstellen, so dass die sämtlichen Basen dieser Quadrate ganze rationale Funktionen von x mit rationalen Coefficienten sind.

Beweis. Den Grad der vorgelegten Funktion $f(x)$ wollen wir mit m bezeichnen; offenbar muss derselbe jedenfalls gerade sein. Für den Fall $m = 0$, d. h. wenn $f(x)$ eine rationale Zahl ist, folgt die Richtigkeit des Satzes 43 unmittelbar aus dem Fermatschen Satze von der Darstellung einer positiven Zahl als Summe von vier Quadratzahlen. Wir nehmen nun an, der Satz sei

---

1) Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung Bd. 6, 1899 und Math. Ann. Bd. 51; ferner: Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.

bereits für die Funktionen vom Grade 2, 4, 6, ..., $m-2$ bewiesen, und zeigen dann seine Richtigkeit für den vorliegenden Fall einer Funktion m^{ten} Grades auf folgende Weise.

Zunächst behandeln wir kurz die Annahme, dass $f(x)$ in das Produkt von zwei oder mehreren ganzen Funktionen von x mit rationalen Coefficienten zerfällt. Ist $p(x)$ eine solche in $f(x)$ aufgehende Funktion, die selbst nicht mehr in ein Produkt von ganzen Funktionen mit rationalen Coefficienten zerlegt werden kann, so folgt aus dem vorausgesetzten definiten Charakter der Funktion $f(x)$ leicht, dass der Faktor $p(x)$ entweder in $f(x)$ zu einer geraden Potenz erhoben vorkommen muss oder dass $p(x)$ selbst definit, d. h. eine solche Funktion ist, die für reelle Werthe von x niemals negativ ausfällt. Im ersteren Falle ist der Quotient $\frac{f(x)}{\{p(x)\}^2}$, im letzteren Falle sind sowohl $p(x)$ als auch $\frac{f(x)}{p(x)}$ wiederum definite Funktionen und diese Funktionen besitzen einen geraden Grad $< m$. Zufolge unserer Annahme sind daher im ersteren Falle $\frac{f(x)}{\{p(x)\}^2}$, im letzteren Falle sowohl $p(x)$ wie auch $\frac{f(x)}{p(x)}$ als Quotienten von Quadratsummen von der im Satze 43 angegebenen Art darstellbar, und daher gestattet notwendig in beiden Fällen auch die Funktion $f(x)$ die verlangte Darstellung.

Wir behandeln nunmehr die Annahme, dass $f(x)$ nicht in das Produkt von zwei ganzen Funktionen mit rationalen Coefficienten zerlegt werden kann. Die Gleichung $f(\vartheta) = 0$ definirt dann einen algebraischen Zahlkörper $k(\vartheta)$ vom m-ten Grade, der nebst seinen sämtlichen conjugirten Körpern imaginär ausfällt. Da somit nach der Definition, die wir dem Satze 42 vorangestellt haben, jede in $k(\vartheta)$ gelegene Zahl, also auch insbesondere die Zahl -1 total positiv in $k(\vartheta)$ ist, so giebt es nach diesem Satz 42 eine Darstellung der Zahl -1 als Summe von 4 Quadraten gewisser Zahlen in $k(\vartheta)$; es sei

$$(1) \qquad -1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze oder gebrochene Zahlen in $k(\vartheta)$ sind. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_1\vartheta^{m-1}+a_2\vartheta^{m-2}+\cdots+a_m = \varphi(\vartheta),\\
\beta &= b_1\vartheta^{m-1}+b_2\vartheta^{m-2}+\cdots+b_m = \psi(\vartheta),\\
\gamma &= c_1\vartheta^{m-1}+c_2\vartheta^{m-2}+\cdots+c_m = \chi(\vartheta),\\
\delta &= d_1\vartheta^{m-1}+d_2\vartheta^{m-2}+\cdots+d_m = \varrho(\vartheta);
\end{aligned}$$

hierin bedeuten $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_m$ rationale Zahlencoefficienten und $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$, $\chi(\vartheta)$, $\varrho(\vartheta)$ die betreffenden ganzen rationalen Funktionen vom $(m-1)$-ten Grade in ϑ.

Wegen (1) ist

$$1+\{\varphi(\vartheta)\}^2+\{\psi(\vartheta)\}^2+\{\chi(\vartheta)\}^2+\{\varrho(\vartheta)\}^2 = 0,$$

und mit Rücksicht auf die Irreducibilität der Gleichung $f(x) = 0$ stellt daher der Ausdruck

$$F(x) = 1+\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2+\{\chi(x)\}^2+\{\varrho(x)\}^2$$

notwendig eine solche ganze rationale Funktion von x dar, die durch $f(x)$ teilbar ist. $F(x)$ ist offenbar eine definite Funktion vom $(2m-2)$-ten oder von niederem Grade und daher wird der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ eine definite Funktion vom $(m-2)$-ten oder von niederem Grade in x mit rationalen Coefficienten. Infolgedessen lässt sich im Hinblick auf unsere Annahme $\frac{F(x)}{f(x)}$ als Quotient zweier Summen von Quadraten von der im Satze 43 angegebenen Art darstellen, und da $F(x)$ selbst eine solche Summe von Quadraten ist, so folgt, dass auch $f(x)$ ein Quotient zweier Summen von Quadraten von der im Satze 43 angegebenen Art sein muss. Damit ist der Beweis des Satzes 43 vollständig erbracht.

Es dürfte sehr schwierig sein, die entsprechenden Thatsachen für ganze rationale Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen aufzustellen und zu beweisen, doch sei hier darauf hingewiesen, dass die Darstellbarkeit einer beliebigen definiten ganzen rationalen Funktion zweier Veränderlicher als Quotient von Quadratsummen ganzer Funktionen auf einem völlig anderen Wege von mir bewiesen worden ist — unter der Voraussetzung, dass für die darstellenden Funktionen nicht blos rationale, sondern beliebige reelle Coefficienten zulässig sind[1]).

§ 39.

Kriterium für die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittelst Lineals und Streckenübertragers.

Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt, die mittelst des Zirkels ausführbar ist; wir wollen dann ein Kriterium aufzustellen versuchen, welches unmittelbar aus der analy-

1) Ueber ternäre definite Formen, Acta Mathematica Bd. 17.

tischen Natur der Aufgabe und ihrer Lösungen beurteilen lässt, ob die Konstruktion auch allein mittelst Lineals und Streckenübertragers ausführbar ist. Wir werden bei dieser Untersuchung auf den folgenden Satz geführt:

Satz 44. *Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt von der Art, dass man bei analytischer Behandlung derselben die Coordinaten der gesuchten Punkte aus den Coordinaten der gegebenen Punkte lediglich durch rationale Operationen und durch Ziehen von Quadratwurzeln finden kann; es sei n die kleinste Anzahl der Quadratwurzeln, die hierbei zur Berechnung der Coordinaten der Punkte ausreichen: soll dann die vorgelegte Konstruktionsaufgabe sich auch allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen lassen, so ist dafür notwendig und hinreichend, dass die geometrische Aufgabe genau 2^n reelle Lösungen besitzt und zwar für alle Lagen der gegebenen Punkte, d. h. für alle Werte der in den Coordinaten der gegebenen Punkte auftretenden willkürlichen Parameter.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz 44 ausschliesslich für den Fall, dass die Coordinaten der gegebenen Punkte rationale Funktionen eines Parameters p mit rationalen Coefficienten sind.

Die Notwendigkeit des aufgestellten Kriteriums leuchtet ein. Um zu zeigen, dass dasselbe auch hinreicht, setzen wir dieses Kriterium als erfüllt voraus und betrachten zunächst eine solche von jenen n Quadratwurzeln, die bei der Berechnung der Coordinaten der gesuchten Punkte zuerst zu ziehen ist. Der Ausdruck unter dieser Quadratwurzel ist eine rationale Funktion $f_1(p)$ des Parameters p mit rationalen Coefficienten; diese rationale Funktion darf für beliebige reelle Parameterwerte p niemals negative Werte annehmen, da sonst entgegen der Voraussetzung die vorgelegte Aufgabe für gewisse Werte p imaginäre Lösungen haben müsste. Aus Satz 43 schliessen wir daher, dass $f_1(p)$ als Quotient von Summen von Quadraten ganzer rationaler Funktionen darstellbar ist.

Nunmehr zeigen die Formeln

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2+d^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dass allgemein das Ziehen der Quadratwurzel aus einer Summe von beliebig vielen Quadraten sich stets zurückführen lässt auf

wiederholtes Ziehen der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate.

Nehmen wir diese Bemerkung mit dem vorigen Ergebnisse zusammen, so erkennen wir, dass der Ausdruck $\sqrt{f_1(p)}$ gewiss mittelst Lineals und Streckenübertragers construirt werden kann.

Wir betrachten ferner eine solche von den n Quadratwurzeln, die bei der Berechnung der Coordinaten der gesuchten Punkte an zweiter Stelle zu ziehen ist. Der Ausdruck unter dieser Quadratwurzel ist eine rationale Funktion $f_2(p, \sqrt{f_1})$ des Parameters p und der zuerst betrachteten Quadratwurzel; auch diese Funktion f_2 ist bei beliebigen reellen Parameterwerten p und für jedes Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ niemals negativer Werte fähig, da sonst entgegen der Voraussetzung die vorgelegte Aufgabe unter ihren 2^n Lösungen für gewisse Werte p auch imaginäre Lösungen haben müsste. Aus diesem Umstande folgt, dass f_2 einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$f_2^2 - \varphi_1(p) f_2 + \psi_1(p) = 0$$

genügen muss, worin $\varphi_1(p)$ und $\psi_1(p)$ notwendig solche rationale Funktionen von p mit rationalen Coefficienten sind, die für reelle Werte von p niemals negative Werte besitzen. Aus der letzteren quadratischen Gleichung entnehmen wir

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi_1(p)}{\varphi_1(p)}.$$

Nun müssen wiederum nach Satz 43 die Funktionen $\varphi_1(p)$ und $\psi_1(p)$ Quotienten von Summen von Quadraten rationaler Funktionen sein und andererseits ist nach dem Vorigen der Ausdruck f_2 mittelst Lineals und Streckenübertragers construirbar; der gefundene Ausdruck für f_2 zeigt somit, dass f_2 ein Quotient von Summen von Quadraten construirbarer Funktionen ist. Also lässt sich auch der Ausdruck $\sqrt{f_2}$ mittelst Lineals und Streckenübertragers construiren.

Ebenso wie der Ausdruck f_2 erweist sich auch jede andere rationale Funktion $\varphi_2(p, \sqrt{f_1})$ von p und $\sqrt{f_1}$ als Quotient zweier Summen von Quadraten construirbarer Funktionen, sobald diese rationale Funktion φ_2 die Eigenschaft besitzt, niemals negative Werte anzunehmen bei reellem Parameter p und für beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$.

Diese Bemerkung gestattet uns, das eben begonnene Schlussverfahren in folgender Weise fortzusetzen.

Es sei $f_3(p, \sqrt{f_1}, \sqrt{f_2})$ ein solcher Ausdruck, der von den drei

Argumenten $p, \sqrt{f_1}, \sqrt{f_2}$ in rationaler Weise abhängt und aus dem bei der analytischen Berechnung der Coordinaten der gesuchten Punkte an dritter Stelle die Quadratwurzel zu ziehen ist. Wie vorhin schliessen wir, dass f_3 bei beliebigen reellen Werten p und für beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ und $\sqrt{f_2}$ niemals negative Werte annehmen darf; dieser Umstand wiederum zeigt, dass f_2 einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$f_2^2 - \varphi_2(p, \sqrt{f_1}) f_2 + \psi_2(p, \sqrt{f_1}) = 0$$

genügen muss, worin φ_2 und ψ_2 solche rationale Funktionen von p und $\sqrt{f_1}$ bedeuten, die für reelle Werte p und beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ negativer Werte nicht fähig sind. Da mithin φ_2 und ψ_2 nach der vorigen Bemerkung Quotienten zweier Summen von Quadraten construirbarer Ausdrücke sind, so folgt das gleiche auch für den Ausdruck

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi_2(p, \sqrt{f_1})}{\varphi_2(p, \sqrt{f_1})}$$

und mithin ist auch $\sqrt{f_2}$ mittelst Lineals und Streckenübertragers construirbar.

Die Fortsetzung dieser Schlussweise führt zum Beweise des Satzes 44 in dem betrachteten Falle eines Parameters p.

Die allgemeine Richtigkeit des Satzes 44 hängt davon ab, ob der Satz 43 in entsprechender Weise sich auf den Fall mehrerer Veränderlicher verallgemeinern lässt.

Als Beispiel für die Anwendung des Satzes 44 mögen die regulären mittelst Zirkels construirbaren Polygone dienen; in diesem Falle kommt ein willkürlicher Parameter p nicht vor, sondern die zu construirenden Ausdrücke stellen sämtlich algebraische Zahlen dar. Man sieht leicht, dass das Kriterium des Satzes 44 erfüllt ist, und somit ergiebt sich, dass man jene regulären Polygone auch allein mittelst Ziehens von Geraden und Abtragens von Strecken construiren kann — ein Resultat, welches sich auch aus der Theorie der Kreisteilung direkt entnehmen lässt.

Was weitere aus der Elementargeometrie bekannte Konstruktionsaufgaben anbetrifft, so sei hier nur erwähnt, dass das Malfattische Problem, nicht aber die Apollonische Berührungsaufgabe allein mittelst Lineals und Streckenübertragers gelöst werden kann.

Schlusswort.

Die vorstehende Abhandlung ist eine kritische Untersuchung der Principien der Geometrie; in dieser Untersuchung leitete uns der Grundsatz, eine jede sich darbietende Frage in der Weise zu erörtern, dass wir zugleich prüften, ob ihre Beantwortung auf einem vorgeschriebenen Wege mit gewissen eingeschränkten Hilfsmitteln möglich oder nicht möglich ist. Dieser Grundsatz scheint mir eine allgemeine und naturgemässe Vorschrift zu enthalten; in der That wird, wenn wir bei unseren mathematischen Betrachtungen einem Probleme begegnen oder einen Satz vermuten, unser Erkenntnistrieb erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung jenes Problems und der strenge Beweis dieses Satzes gelingt oder wenn der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Misslingens von uns klar erkannt worden ist.

So spielt denn in der neueren Mathematik die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen oder Aufgaben eine hervorragende Rolle und das Bestreben, eine Frage solcher Art zu beantworten, war oftmals der Anlass zur Entdeckung neuer und fruchtbarer Forschungsgebiete. Wir erinnern nur an *Abel*'s Beweis für die Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch Wurzelziehen, ferner an die Erkenntnis der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms und an *Hermite*'s und *Lindemann*'s Sätze von der Unmöglichkeit, die Zahlen e und π auf algebraischem Wege zu construiren.

Der Grundsatz, demzufolge man überall die Principien der Möglichkeit der Beweise erörtern soll, hängt auch aufs Engste mit der Forderung der „Reinheit“ der Beweismethoden zusammen, die von mehreren Mathematikern der neueren Zeit mit Nachdruck erhoben worden ist. Diese Forderung ist im Grunde nichts Anderes als eine subjektive Fassung des hier befolgten Grundsatzes. In der That sucht die vorstehende geometrische Untersuchung allgemein darüber Aufschluss zu geben, welche Axiome, Voraussetzungen oder Hilfsmittel zum Beweise einer elementar-geo-

metrischen Wahrheit nötig sind, und es bleibt dann dem jedesmaligen Ermessen anheim gestellt, welche Beweismethode von dem gerade eingenommenen Standpunkte aus zu bevorzugen ist.

Bei der Anfertigung der Figuren sowie bei der Durchsicht der Correcturbogen habe ich mich der Hülfe des Herrn Dr. *Hans von Schaper* erfreut; ich spreche ihm hierfür meinen Dank aus. Desgleichen danke ich meinem Freunde *Hermann Minkowski* und Herrn Dr. *Julius Sommer* für ihre Unterstützung beim Lesen der Correctur.

Inhalt.

Kapitel VI. Der Pascalsche Satz.

Kapitel VII. Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—V.

[11.]

GRUNDLAGEN DER ELEKTRODYNAMIK.

„Was du ererbt von deinen Vätern hast,
Erwirb es, um es zu besitzen.
Goethe, Faust, I. Th.

VON

DR. EMIL WIECHERT,
A.O. PROFESSOR DER GEOPHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

Vorwort.

Bei dem Studium vieler Darstellungen der Elektrodynamik gewinnt der Leser den Eindruck, als ob die neuere Entwicklung mit der älteren im Widerspruch stände. Die Vorstellungsbilder, mit welchen früher gearbeitet wurde, und die sich so gut den sinnlichen Wahrnehmungen anpassen, werden als irreführend hingestellt, sodass es nothwendig scheint, mit ihnen aufzuräumen, um den Weg zur höheren Erkenntniss zu finden.

Hier hat wohl die berechtigte Freude an dem Neuen den Entdecker und den ihm folgenden Forscher zu weit geführt, denn ein Widerspruch ist in vielem Wichtigen durchaus nicht vorhanden; ja, ich glaube, dass wir erst dann zu einem befriedigenden Abschluss gelangen, wenn mehr als bisher das Neue an das Alte angegliedert und mit diesem zu einem Ganzen verbunden wird. Insbesondere scheint die weitere Ausführung der Maxwell'schen Theorie die alte Vorstellung zweier Elektricitäten wieder in den Vordergrund zu rücken, zu verschönen und zu vertiefen. — Diese Ansichten, welche ich schon mehrfach ausgesprochen habe, sollen im Folgenden etwas weiter ausgestaltet werden. —

Nach einigen mathematischen Vorbemerkungen werden zunächst diejenigen Erfahrungsthatsachen im Zusammenhang dargestellt, von welchen die Entwicklung einer allgemeinen Theorie der Elektrodynamik in erster Linie ausgehen muss. Es ist dabei meine Absicht, die bekannten Gesetze so zu gruppiren und auszuführen, dass die Wurzeln der allgemeinen Theorie deutlich erkennbar werden. Hierzu müssen die Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft von vorne herein in den Mittelpunkt der Darstellung gerückt werden. Es ist überraschend zu beobachten, wie weit wir dann gelangen, — stellen sich doch selbst die Hertz-Heaviside'schen Gleichungen in ihrer vollständigen Form ein! (Art. 34 und 37).

Bei der Entwicklung der allgemeinen Theorie beginne ich mit der Besprechung der Maxwell'schen und der sich unmittelbar

anschliessenden Arbeiten, weil es so möglich wird, ihren leitenden Gedanken einer Vermittelung der elektrodynamischen Wirkungen sogleich zur Geltung zu bringen. Die Vorstellungsbilder, von denen wir bei dem Studium der Erfahrungsthatsachen ausgingen, scheinen sich dabei zu verflüchtigen; sie werden aber wieder greifbar, sobald wir daran gehen, unsere Erfahrungen über die molekulare Konstitution der Materie zu verwerthen. — Es ergiebt sich schliesslich ein überaus einfaches Bild der Elektrodynamik, in welchem die Elektricität sozusagen zur Materie selbst wird, oder, vielleicht besser ausgedrückt, zu einer besonderen Erscheinungsform der Materie.

I. Mathematische Vorbemerkungen.

1. Einige Sätze der Vektortheorie, die für den Uebergang von der Erfahrung zur Theorie der Elektrodynamik von besonderer Wichtigkeit sind, sollen hier im Zusammenhang und in derjenigen Form dargelegt werden, in welcher sie später zur Anwendung kommen. So wird es möglich, die Darstellung zu verkürzen und die rein mathematische Bedeutung der Sätze in erwünschter Weise zur Geltung zu bringen.

Die verwendeten Bezeichnungen werden in einer Tabelle am Schlusse der Abhandlung so ausführlich erklärt, dass eine Besprechung an dieser Stelle unterbleiben kann.

§ 1. Skalares und Vektor-Potential.

2. *Skalares Potential.* Das skalare Potential ist selbst eine skalare Raumfunktion und ordnet sich einer solchen zu. Es ist am bequemsten, die letztere unter dem Bilde einer im Raum vertheilten „Masse" zu betrachten. Bezeichnet dm die Masse in irgend einem Raumelement und φ das Potential, so kann

$$\varphi = \int \frac{dm}{r}$$

als *Definitionsgleichung von* φ angesehen werden. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass die Massen sämmtlich im Endlichen liegen, und dass ihre Raumdichte überall endlich ist; die für die Praxis noch in Betracht kommenden Fälle der flächenhaften, linearen und punktförmigen Vertheilung können dann als Grenzfälle in die Theorie eingeordnet werden und beanspruchen bei der allgemeinen Untersuchung keine besondere Aus-

zeichnung. Dieser Kunstgriff, Unstetigkeiten zu behandeln, wurde schon von Maxwell, dann von v. Helmholtz und später vielfach angewandt; er wird uns weiterhin noch oft gute Dienste leisten. — χ sei die Raumdichte; es wird dann $dm = \chi d\omega$ und

$$\varphi = \int d\omega \frac{\chi}{r};$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\chi \qquad \text{(Poisson'sche Gleich.).}$$

Von besonderer Wichtigkeit für die praktischen Anwendungen ist der durch die Gleichung

$$A_\nu = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$$

mit φ verbundene Vektor A. Er erfüllt die *Differentialgleichungen*

$$\text{Div} A = -\Delta\varphi = 4\pi\chi, \qquad \text{Quirl } A = 0$$

und für beliebige Räume und Flächen die *Integralgleichungen*

$$\overline{\int} d\sigma A_\nu = 4\pi m \text{ (Gauss'scher Satz)}, \quad \overset{\circ}{\int} d\lambda A_\lambda = 0.$$

m bedeutet die Masse in demjenigen Raum, auf dessen Oberfläche sich das Flächenintegral bezieht; für dieses letztere muss die nach aussen weisende Normale gewählt werden.

Mit Rücksicht auf die Anwendungen ist

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{r}$$

als die *Energie* des Systemes zu bezeichnen, wenn sowohl für dm als für dm' nacheinander alle Massentheilchen genommen werden. Nach einem bekannten Satze von Green ist

$$\int d\omega A^2 = -\int d\omega\,\varphi\Delta\varphi - \overline{\int} d\sigma\,\varphi A_\nu.$$

Wenden wir diese Formel auf einen alle Massen umschliessenden Raum an, und rücken seine begrenzende Fläche ins Unendliche, so verschwindet das Flächenintegral rechts, und das Raumintegral führt unter Rücksicht auf $\Delta\varphi = -4\pi\chi$ zu dem Ausdruck für die Energie. Wir erhalten so:

$$E = \tfrac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{r} = \tfrac{1}{2}\int dm\,\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\iint \frac{d\omega\,d\omega'\chi\chi'}{r} = \tfrac{1}{2}\int d\omega\,\chi\varphi = \frac{1}{8\pi}\int d\omega A^2,$$

wobei das letzte Raumintegral über den unendlichen Raum auszudehnen ist.

3. *Vektorpotential.* Das „Vektorpotential" ist — nach Maxwell — eine vektorelle Raumfunktion und ordnet sich einer solchen zu. Die letztere wird am bequemsten unter dem Bilde einer *strömenden Flüssigkeit* betrachtet. $i, d\lambda$ sei ein „*Stromelement*" d. h. ein Element eines Stromfadens von der Länge $d\lambda$, durch dessen Querschnitt in der Zeiteinheit die Menge i fliesst. Dann kann

$$\Gamma_\nu = \int \frac{i\,d\lambda}{r} \cos(\nu, d\lambda)$$

als *Definitionsgleichung des zugehörigen Vektorpotentials* Γ angesehen werden. ν darf dabei jede beliebige Richtung vorstellen. — Wir wollen weiterhin annehmen, dass das ganze Stromsystem im Endlichen liegt.

Aehnlich wie beim skalaren Potential empfiehlt es sich auch hier, zunächst nur dreidimensionale Strömungen vorauszusetzen, und die flächenhaften sowie die linearen Strömungen dann erst in zweiter Linie als Grenzfälle zu behandeln. Bedeutet γ die „*räumliche Strömung*", d. h. den Vektor, welcher in $\gamma_\nu\, d\sigma$ die während der Zeiteinheit in der Richtung ν durch das Flächenelement $d\sigma$ hindurchtretende Flüssigkeitsmenge angiebt, so kann $i\,d\lambda$ durch $\gamma\,d\omega$, also $i\,d\lambda \cos(\nu, d\lambda)$ durch $\gamma_\nu d\omega$ ersetzt werden, und wir erhalten

$$\Gamma_\nu = \int d\omega \frac{\gamma_\nu}{r},$$

als Definitionsgleichung des Vektorpotentials; sie ergiebt:

$$\Delta\Gamma_\nu = -4\pi\gamma_\nu.$$

Wird hier in γ nichts anderes als eine vektorelle Raumfunktion gesehen, so bleibt man unabhängig vom Bilde der Strömung. —

Wenn γ überall stetig variirt, ergiebt sich

$$\mathrm{Div}\,\Gamma = \int d\omega \frac{\mathrm{Div}\,\gamma}{r}.$$

In unserem Bilde der Strömung bedeutet

$$-\mathrm{Div}\,\gamma = \frac{d\chi}{dt} = \chi'$$

die Geschwindigkeit, mit welcher die Dichte χ der Flüssigkeit anwächst. Ist also φ' ihr skalares Potential:

$$\varphi = \int d\omega \frac{\chi}{r},$$

so folgt:

$$\operatorname{Div} \Gamma = -\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi'.$$

Diese Darstellung von $\operatorname{Div}\Gamma$ bleibt auch gültig, wenn γ Unstetigkeitsflächen besitzt. In der That ergiebt sich dann:

$$\operatorname{Div} \Gamma = \int d\omega \frac{\operatorname{Div}\gamma}{r} + \int d\sigma \frac{(\gamma_\nu)_1 + (\gamma_\nu)_2}{r} = -\varphi',$$

wobei das Flächenintegral auf die Unstetigkeitsflächen zu beziehen ist und $(\gamma_\nu)_1$ und $(\gamma_\nu)_2$ die von der Fläche fortweisenden Normalkomponenten von γ bezeichnen. Im Anschluss an die letzte Formel kann man φ' als eine (skalare) Potentialfunktion für sich betrachten und so die Bezugnahme auf die Zeit vermeiden. —

4. *Quirl des Vektorpotentials.* Aehnlich wie beim skalaren Potential steht auch beim Vektorpotential für die Anwendung ein abhängiger Vektor im Vordergrund des Interesses. In diesem Falle ist es der *Quirl*; bezeichnen wir also den abhängigen Vektor wieder mit A, so ist jetzt

$$A \cong \operatorname{Quirl} \Gamma.$$

seine Definitionsgleichung.

Aus den Gleichungen

$$\operatorname{Div} V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$Q_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \qquad Q_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \qquad Q_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

lässt sich leicht erkennen, dass für einen Vektor Q, der den Quirl des anderen V darstellt, allgemein die folgenden Sätze gelten:

$$\operatorname{Div} Q = 0, \qquad \operatorname{Quirl}_\nu Q = \frac{\partial}{\partial \nu} \operatorname{Div} V - \Delta V_\nu.$$

Mit Rücksicht hierauf ergeben sich für das Feld von A die *Differentialgleichungen:*

$$\operatorname{Div} A = 0, \qquad \operatorname{Quirl} A \cong \mathsf{A}' + 4\pi\gamma,$$

aus denen weiter für beliebige Flächen und Räume die *Integralgleichungen* folgen:

$$\int^{0} d\sigma A_\nu = 0, \qquad \overline{\int} d\lambda A_\lambda = \int d\sigma \mathsf{A}'_\nu + 4\pi \int d\sigma \gamma_\nu.$$

Unter A' ist der mittelst

$$\mathsf{A}'_\nu = -\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu}$$

zu dem skalaren Potential

$$\varphi' = -\int d\omega \frac{\mathrm{Div}\,\gamma}{r} - \int d\sigma \frac{(\gamma_\nu)_1 + (\gamma_\nu)_2}{r}$$

zugeordnete Vektor zu verstehen.

Bei Benutzung des Bildes der strömenden Flüssigkeit erscheint unser System von Formeln mit folgendem gleichwerthig:

$$\mathrm{Div}\,A = 0, \quad \mathrm{Quirl}\,A \cong \frac{d^*\mathsf{A}}{dt} + 4\pi\gamma,$$

$$\int^0 d\sigma A_\nu = 0, \qquad \overline{\int} d\lambda A_\lambda = \frac{d}{dt}\int d\sigma \mathsf{A}_\nu + 4\pi \int d\sigma \gamma_\nu;$$

$$\mathsf{A}_\nu = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \qquad \varphi = \int \frac{dm}{r},$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\mathrm{Div}\,\gamma, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -(\gamma_\nu)_1 - (\gamma_\nu)_2.$$

m bedeutet die Masse der fingirten Flüssigkeit, χ ihre Raumdichte, η ihre Flächendichte. Der Zusammenhang von A mit A' wird durch

$$\mathsf{A}' \cong \frac{d^*\mathsf{A}}{dt}, \qquad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$$

vermittelt. —

5. *Geschlossenes Stromsystem.* Ist insbesondere

$$\mathrm{Div}\,\gamma = 0, \qquad (\gamma_\nu)_1 + (\gamma_\nu)_2 = 0,$$

so entspricht die fingirte Flüssigkeit den Bedingungen einer geschlossenen Strömung; es strömt in jedem Volumtheil ebenso viel Flüssigkeit ein wie aus. Für diesen ausgezeichneten Fall erhalten wir:

$$\mathrm{Div}\,\Gamma = 0, \qquad \varphi' = 0, \qquad \mathsf{A}' = 0$$

und es ergeben sich für A die Feldbedingungen:

$$\mathrm{Div}\,A = 0, \qquad \mathrm{Quirl}\,A \cong 4\pi\gamma,$$

$$\int^0 d\sigma A_\nu, \qquad \overline{\int} d\lambda A_\lambda = 4\pi \int d\sigma \gamma_\nu. \text{ —}$$

Mit Rücksicht auf die elektrodynamischen Anwendungen kann hier das mit umgekehrtem Vorzeichen versehene *Neumann'sche elektrodynamische Potential:*

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}\iint \frac{d\lambda\, d\lambda'\, i i' \cos(d\lambda, d\lambda')}{r}$$

als *Energie des Systems* bezeichnet werden. Geht man von $\int d\omega A^2$ aus, ersetzt A^2 durch $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$, hierin A_x^2 durch $A_x \partial\Gamma_z/\partial y - A_x \partial\Gamma_y/\partial z$, u. s. w., so führen partielle Integrationen zu dem Ausdruck für die Energie, und es ergiebt sich:

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}\iint \frac{d\lambda\, d\lambda'\, ii' \cos(d\lambda, d\lambda')}{r} = \tfrac{1}{2}\int d\lambda\, i\, \Gamma \cos(\Gamma, d\lambda)$$

$$= \tfrac{1}{2}\iint \frac{d\omega\, d\omega'\, \gamma\gamma' \cos(\gamma, \gamma')}{r} = \tfrac{1}{2}\int d\omega\, \gamma\, \Gamma_\gamma = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, A^2$$

wobei das letzte Raumintegral über den unendlichen Raum auszudehnen ist.

§ 2. Analytische Konstruktionen von Vektorfeldern.

6. Innerhalb der Fläche Σ sei $\operatorname{Div} A = 0$, $\operatorname{Quirl} A = \sigma$ vorgeschrieben. Wegen der letzteren Bedingung besteht dann ein skalares Potential φ, bei dem eine addirte Konstante willkürlich bleibt; diese bestimmen wir so, dass φ in einem beliebigen Punkt von Σ den Werth 0 annimmt. Der in Art. 2 mitgetheilte Green'sche Satz ergiebt:

$$\int d\omega\, A^2 = -\bar{\int} d\sigma\, \varphi\, A_\nu.$$

Das Integral rechts verschwindet für unendlich ferne Flächen, wenn $\lim r^2 A$ und damit auch $\lim r\varphi$ für unendlich wachsende Entfernungen r von einem im Endlichen liegenden Punkt endlich bleibt. Die linke Seite kann nur 0 ergeben, wenn A überall verschwindet. So folgt denn als Resultat der drei Bedingungen

a) $\qquad \operatorname{Div} A = 0, \qquad \operatorname{Quirl} A = 0, \qquad \lim_{r=\infty} r^2 A$ endlich:

$$A = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf ist es unter Benutzung der Untersuchungen des vorigen Paragraphen leicht, analytische Darstellungen von Vektorfeldern zu geben, wenn Divergenz und Quirl vorgeschrieben sind. Man findet zu den Bedingungen:

b) $\qquad \operatorname{Div} A = 4\pi\chi, \qquad \operatorname{Quirl} A = 0, \qquad \lim_{r=\infty} r^2 A$ endlich:

$$A_\nu = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \qquad \varphi = \int d\omega \frac{\chi}{r};$$

c) $\qquad \operatorname{Div} A = 0, \qquad \operatorname{Quirl} A \cong 4\pi\gamma, \qquad \lim_{r=\infty} r^2 A$ endlich:

$$A \cong \operatorname{Quirl} \Gamma, \qquad \Gamma_\nu = \int d\omega \frac{\gamma_\nu}{r};$$

d) $\text{Div}\, A = 4\pi\chi, \quad \text{Quirl}\, A \cong 4\pi\gamma, \quad \lim_{r=\infty} r^2 A$ endlich:

$$A_\nu \cong -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \text{Quirl}_\nu \Gamma. \text{ —}$$

Es muß dabei

$$\text{Div}\, \gamma = 0$$

sein, weil $4\pi\gamma$ sonst überhaupt nicht den Quirl eines Vektors vorstellen könnte. Angenommen ist überdies, dass die Bereiche von nicht verschwindender Divergenz und von nicht verschwindendem Quirl ganz im Endlichen liegen. —

II. Fundamentale Thatsachen der Erfahrung.

§ 3. Coulomb'sches Gesetz und elektrische Kraft.

7. *Bild der elektrischen Fluida.* Für die Beschreibung einer grossen Zahl von elektrodynamischen Erscheinungen giebt es auch heute noch kein bequemeres Hilfsmittel als das alte Bild zweier imponderabler Flüssigkeiten von entgegengesetzten Eigenschaften, der *positiven und der negativen Elektricität.* Wir wollen uns daher nicht scheuen, es im Folgenden ausgiebig zu verwerthen, jedoch von vorne herein ausdrücklich feststellen, dass durchaus nicht etwa behauptet werden soll, dass die elektrischen Flüssigkeiten wirklich existiren. Diese sind uns zunächst nichts weiter als Bilder der Vorstellung. Unsere Aufgabe wird es sein, so weit als möglich zu ergründen, was ihnen in der Wirklichkeit entspricht.

8. *Coulomb'sches Gesetz.* Aus den elektrostatischen Fernwirkungen folgerte Coulomb[1]) das Gesetz:

$$F = \varkappa^2 \frac{ee'}{r^2}.$$

Es sagt aus, dass zwei elektrische Theilchen mit den Mengen e und e', deren räumliche Ausdehnung gegenüber ihrem Abstand r verschwindend ist, aufeinander gleiche und entgegengesetzte Kräfte von der Intensität F ausüben. Ein positives Vorzeichen von F bedeutet Abstossung, ein negatives Vorzeichen Anziehung; $\varkappa$ ist eine Konstante, deren Werth von den Einheiten für F, e und r abhängt. Wird die Einheit für die Elektricitätsmenge insbesondere so gewählt, dass $\varkappa$ den Werth 1 annimmt, also

$$F = \frac{ee'}{r}$$

1) Mémoires de l'Acad. Paris 1785.

wird, so sagt man, die Elektricität werde nach *„elektrostatischem Maass“* gemessen. Wo im Folgenden nicht ausdrücklich andere Angaben gemacht werden, wird dieses Maass benutzt.

9. *Elektrische Kraft als Rechnungsgrösse; elektromotorische Kraft.* Denkt man sich die Vertheilung der Elektricität im ganzen System festgehalten und ein nicht zum System gehöriges Theilchen e an irgend eine Stelle gebracht, so erfährt es nach dem Coulomb'schen Gesetz eine mechanische Kraft, deren Intensität mit e proportional ist, und die einer gewissen von e unabhängigen Geraden parallel liegt. Wird die Intensität durch e dividirt, so ergiebt sich ein Vektor, der allein von der Vertheilung der Elektricität im System und nicht von der Beschaffenheit der zur Prüfung benutzten Theilchen abhängt. Man nennt den so definirten Vektor, der polaren Charakter hat, die *„elektrische Kraft“*; wir werden sie im Folgenden mit K bezeichnen.

Gemäss der Definition von K wird die mechanische Kraft F, welche ein wirklich vorhandenes oder nur gedachtes elektrisches Theilchen e an irgend einer Stelle im Felde erfährt, durch

$$F \cong e\mathsf{K}$$

bestimmt. Ist also K als Funktion des Ortes bekannt, so können alle durch das Coulomb'sche Gesetz beherrschten mechanischen Kräfte elektrischen Ursprungs in einfachster Weise angegeben werden, ohne dass es nöthig wäre, auf die Wechselwirkung der einzelnen Paare von Theilchen zurückzugehen: Hierin beruht die grosse Wichtigkeit der elektrischen Kraft auf unserem vorläufigen empirischen Standpunkt, der sie uns als blosse Rechnungsgrösse zeigt. —

Das Linienintegral der elektrischen Kraft wird *„elektromotorische Kraft“* genannt und mit E bezeichnet werden:

$$E = \int d\lambda \mathsf{K}_\lambda.$$

10. *Elektrisches Potential und elektrische Energie.* Gemäß der Coulomb'schen Formel

$$F = \frac{ee'}{r}$$

ist K bestimmt durch

$$\mathsf{K}_\nu = -\int \frac{de}{r^2} \cos(r, \nu) = -\frac{\partial}{\partial \nu} \int \frac{de}{r}.$$

K gehört hiernach mittels der Formel

$$\mathsf{K}_\nu = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$

zu dem skalaren Potential

$$\varphi = \int \frac{de}{r}.$$

Die mechanische Arbeit, welche die elektrische Wechselwirkung zwischen zwei Theilchen de, de' bei einer unendlich kleinen Verrückung leistet, ist

$$\delta W = \frac{de\,de'}{r^2}\delta r = -\delta\left(\frac{de\,de'}{r}\right).$$

Hieraus folgt, dass die Gesammtheit der elektrischen Kräfte in einem beliebigen System bei einer unendlich kleinen Lagenveränderung die mechanische Arbeit

$$\delta W = -\delta\,\tfrac{1}{2}\iint\frac{de\,de'}{r} = -\delta\,\tfrac{1}{2}\int de\,\varphi$$

ergiebt. Der dem Doppelintegral beigefügte Faktor $\frac{1}{2}$ entspricht der Bestimmung, dass für de und de' nacheinander alle Elektricitätstheilchen genommen werden sollen, sodass jedes Paar zweimal auftritt. Setzen wir

$$\tfrac{1}{2}\iint\frac{de\,de'}{r} = \mathsf{E},$$

so folgt, dass für jede beliebige unendlich kleine oder endliche räumliche Verschiebung der Elektricität im System die Abnahme von E die nach aussen abgegebene mechanische Energie angiebt:

$$W = \mathsf{E}_1 - \mathsf{E}_2.$$

Die Größe E selbst bedeutet die durch vollständige Zerstreuung der Electricität zu gewinnende Energie; um dieser Eigenschaft willen soll sie *„elektrische Energie"* des Systemes genannt werden. — Nach Art. 2 der mathematischen Vorbemerkungen ist

$$\mathsf{E} = \tfrac{1}{2}\iint\frac{de\,de'}{r} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\,\mathsf{K}^2,$$

wenn das Raumintegral über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnt wird.

11. *Feldgleichungen der elektrischen Kraft.* Nach Art. 2 erfüllt K die *Differentialgleichungen:*

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{K}\,(= -\Delta\varphi) = 4\pi\chi, \qquad \mathrm{Quirl}\,\mathsf{K} = 0,$$

und für alle Räume und Linien die *Integralgleichungen*:

$$\overline{\int} d\sigma \mathsf{K}_\nu = 4\pi e, \qquad \int^0 d\lambda \mathsf{K}_\lambda = 0.$$

χ bedeutet die Raumdichte der Elektricität, e die Menge der Elektricität in dem Raum, auf dessen Oberfläche sich das Flächenintegral bezieht. Bei Anwendung der Gleichungen auf elektrisirte Flächen ergeben sich die Bedingungen:

$$(\mathsf{K}_\nu)_1 + (\mathsf{K}_\nu)_2 = 4\pi\eta, \qquad (\mathsf{K}_\tau)_1 = (\mathsf{K}_\tau)_2.$$

η bedeutet die Flächendichte der Elektricität, $(\mathsf{K}_\nu)_1$ und $(\mathsf{K}_\nu)_2$ die von der Fläche fortweisenden Normalkomponenten in unendlich naher Nachbarschaft, τ eine beliebige Tangentialrichtung.

Befindet sich alle in Betracht kommende Elektricität im Endlichen, so ist nach der Potentialdarstellung von K:

$$\lim_{r=\infty} r^2 \mathsf{K} = 0. \text{ —}$$

Nach Art. 6 bestimmen die vorstehenden Feldgleichungen die Vertheilung der elektrischen Kraft K eindeutig, sobald die Vertheilung der Elektricität gegeben ist. *Hieraus ist zu schliessen, dass sie das Coulomb'sche Gesetz vollständig ersetzen, wenn man noch den Satz hinzunimmt, dass ein Elektricitätstheilchen von nicht merklicher Ausdehnung im Felde die mechanische Kraft*

$$F \cong e\mathsf{K}$$

erfährt.

§ 4. Bewegung der Elektricität.

12. *Satz von der Erhaltung der Elektricität.* Die Elektricität erscheint uns stets an sinnlich wahrnehmbare Materie gebunden; mit und in dieser aber beobachten wir die mannigfachsten Bewegungen. — In vielen Fällen scheint Elektricität neu zu entstehen oder zu verschwinden, doch geschieht dieses erfahrungsmässig stets in solcher Weise, dass gleich grosse Mengen beider Arten entstehen oder vergehen. Wenn also die beiden Arten in der gewöhnlichen Weise mit entgegengesetztem Vorzeichen in Rechnung gesetzt werden, so bleibt die algebraische Gesammtsumme der Elektricität dauernd unverändert. Es entsteht und vergeht ferner unseres Wissens niemals an einer Stelle Elektricität für solche, die unvermittelt an einer anderen Stelle vergeht oder entsteht; vielmehr lässt sich stets ein Weg nachweisen, auf dem der Ueber-

gang lückenlos stattgefunden hat. Diese beiden Erfahrungen zusammengenommen, werden wir im Folgenden als *„Satz von der Erhaltung der Elektricität“* bezeichnen.

In dem Bilde der beiden imponderablen elektrischen Flüssigkeiten lässt sich der Satz sehr einfach und anschaulich dadurch zur Geltung bringen, dass *jedes einzelne individuelle Theilchen beider Arten von Elektricität als unveränderlich betrachtet wird.* Zur näheren Ausführung dieser Anschauung ist es nothwendig anzunehmen, dass innerhalb der Materie an jeder Stelle stets beide Arten von Elektricität in grosser Menge vorhanden sind. An Stelle der Worte *„Neubildung“* und *„Zerstörung“* von Elektricität treten dann *„Scheidung“* und *„Vereinigung“*. Der Ueberschuss der einen oder der anderen Elektricität, welcher für die Wirkungen in die Ferne allein in Rechnung kommt, wird *„freie Elektricität“* genannt.

13. *Analytische Formulirung des Satzes von der Erhaltung der Elektricität.* e sei die algebraische Summe der Elektricität, kürzer: die „Elektricitätsmenge“, welche durch die Fläche Σ in einer vorgeschriebenen Richtung bis zur Zeit t hindurchgegangen ist, es heisst dann

$$i = \frac{de}{dt}$$

der *„elektrische Strom“* durch Σ in der betreffenden Richtung.

Ist $d\sigma$ ein Flächenelement, ν eine der beiden Normalenrichtungen und setzen wir den zugehörigen Strom

$$di = \gamma_\nu d\sigma,$$

so heisst γ_ν die zugehörige *„Stromdichte“* und der Vektor γ, dessen Komponente bei variabler Richtung ν durch γ_ν angegeben wird, die *„Strömung“* der Elektricität.

Bezeichnet e die freie Elektricität in einem beliebigen Raum, so muss nach dem Satze der Erhaltung der Elektricität jederzeit

$$\frac{de}{dt} = -\bar{i} = -\bar{\int} d\sigma \gamma_\nu$$

sein, wenn der Strom i und das Flächenintegral auf die nach aussen führende Normalenrichtung der Oberfläche bezogen werden. *Diese Gleichung kann als analytische Formulirung des Satzes von der Erhaltung der Elektricität angesehen werden*, wenn man in ihr die Behauptung dafür sieht, dass bei allen uns bekannten Naturvorgängen eine der Formel entsprechende Raumfunktion γ physikalisch bemerkbar wird.

Bei Anwendung des Satzes auf unendlich kleine Volumtheile ergeben sich für die Veränderungen von elektrischer Raumdichte χ und Flächendichte η die Sätze:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\mathrm{Div}\,\gamma; \qquad \frac{d\eta}{dt} = -(\gamma_\nu)_1 - (\gamma_\nu)_2.$$

14. *Erweiterung der Begriffe der elektrischen und der elektromotorischen Kraft.* Bei den Bewegungen der Elektricität innerhalb und mit der Materie sind vor allem die vom Coulomb'schen Gesetz beherrschten Fernwirkungen betheiligt, doch beobachten wir auch mancherlei andere Ursachen. Wenn deren Einwirkung sich ebenfalls durch einen Vektor von der Art der elektrischen Kraft K darstellen lässt, soll auch dieser „elektrische Kraft" genannt und mit dem Symbol K bezeichnet werden. Name und Symbol werden wir endlich auch für die Resultante einiger oder aller dieser Kräfte benutzen. Wo eine Unterscheidung angezeigt scheint, muss diese durch Zusätze oder Indices erreicht werden; so ist von „elektrostatischer" Kraft, „voltaelektrischer" Kraft, „thermoelektrischer" Kraft, „inducirter elektrischer" Kraft, „gesammter elektrischer Kraft" zu sprechen. Entscheidend ist dabei immer, dass wir für die mechanische Kraft F, welche ein elektrisches Theilchen e antreibt, die Formel

$$F \cong e\mathsf{K}$$

annehmen.

Für die elektromotorische Kraft, d. h. nach Art. 9 für das Linienintegral der elektrischen Kraft:

$$E = \int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda$$

ergiebt sich hiernach ohne Weiteres eine entsprechende erweiterte Bedeutung.

15. *Galvanische Leitung; dielektrische Verschiebung.* In „Leitern" kann die Elektricität sich abgesehen von einem der Reibung ähnlichen Widerstand frei bewegen. Es tritt daher Ruhe nur ein, wenn die gesammte elektrische Kraft im Innern verschwindet und auf den Grenzen gegen Isolatoren senkrecht steht. Für die Elektricitätsbewegung in einem Leiter bei nicht verschwindender gesammter elektrischer Kraft ist es erfahrungsmässig erlaubt, eine lineare Beziehung zwischen der Strömung γ und der Kraft K anzunehmen, also zu schreiben

$$\gamma_\mu = c_{\mu,x}\mathsf{K}_x + c_{\mu,y}\mathsf{K}_y + c_{\mu,z}\mathsf{K}_z,$$

$$\mu = x,\ y,\ z,$$

wobei die $c_{x,x}$, $c_{x,y}$ u. s. w. Konstanten sind. Speciell für isotrope Medien ergiebt sich:

$$\gamma \cong c\mathsf{K}.$$

Der Faktor c heisst „*Leitfähigkeit*“.

Die elektrische Arbeit, welche bei der galvanischen Leitung durch die Reibung verbraucht wird, ist gemäss den Bedeutungen von γ und K:

$$dW = d\omega \cdot \gamma \mathsf{K} \cos(\gamma, \mathsf{K});$$

sie tritt erfahrungsmässig als Joule'sche Wärme wieder zu Tage.

Die materiellen Isolatoren verhalten sich so, als ob die in ihnen nach Art. 12 anzunehmende Elektricität unter dem Einfluss der elektrischen Kraft ebenfalls wie in den Leitern verschiebbar ist, als ob dabei aber mit den Verschiebungen wachsende Kräfte auftreten, welche die einzelnen elektrischen Theilchen in die Ruhelage zurückzuführen streben. de sei die Elektricitätsmenge, welche vom unerregten Zustand ab gerechnet durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Normalenrichtung ν hindurchgetreten ist, dann soll der Vektor ε, dessen Komponente ε_ν durch

$$de = \varepsilon_\nu d\sigma$$

bestimmt wird, im Anschluss an Maxwell, jedoch, wie wir später erkennen werden, seiner Definition nicht genau entsprechend „*dielektrische Verschiebung*“ oder „*dielektrische Polarisation*“ genannt werden. Erfahrungsgemäss ist es in vielen Fällen hinreichend, ε von K linear abhängig zu setzen:

$$\varepsilon_\mu = h_{\mu,x}\mathsf{K}_x + h_{\mu,y}\mathsf{K}_y + h_{\mu,z}\mathsf{K}_z,$$
$$\mu = x, y, z,$$

also für isotrope Medien anzunehmen:

$$\varepsilon \cong h\mathsf{K}.$$

Die materiellen sogenannten Isolatoren, um welche es sich hier handelt, leiten in der Regel ein wenig, sodass bei ihnen galvanische Leitung und dielektrische Verschiebung nebeneinander vorkommen. Es steht nichts im Wege, nach dem Vorgang von Maxwell alle Leiter zugleich auch als Dielektrika aufzufassen.

16. *Wahre und freie Elektricität*; *elektrische Induktion.* Diejenige freie Elektricität, welche sich ergiebt, wenn man die dielektrische Polarisation aufgehoben denkt, während alles Uebrige un-

verändert bleibt, heisst *„wahre Elektricität"*. Hiernach ist für einen beliebigen Raum

$$e^{(w)} = e + \bar{\int} d\sigma\, \varepsilon_\nu,$$

wenn $e^{(w)}$ die wahre Elektricität und e die thatsächlich vorhandene freie Elektricität bedeutet.

K sei die elektrische Kraft, welche den Coulomb'schen Fernwirkungen entspricht, dann ist nach Art. 11:

$$4\pi e = \bar{\int} d\sigma\, \mathsf{K}_\lambda;$$

unsere Gleichung für $e^{(w)}$ ergiebt hiernach:

$$4\pi e^{(w)} = \bar{\int} d\sigma\, K_\lambda,$$

wenn K den durch

$$K \cong \mathsf{K} + 4\pi\varepsilon$$

bestimmten Vektor bezeichnet. Wie ersichtlich, steht dieser zu der wahren Elektricität in einer ganz ähnlichen Beziehung wie die elektrische Kraft zu der freien Elektricität. Maxwell nennt $K/4\pi$ *„electrical displacement"*, Hertz K selbst die *„elektrische Polarisation"*. Wir werden den Maxwell'schen Ausdruck mit „Maxwell'sche dielektrische Verschiebung" übersetzen. K selbst kann als ein Analogon zur magnetischen Induktion *„elektrische Induktion"* genannt werden.

Darf ε als lineare Funktion von K gelten, so erscheint auch K mit K linear verbunden. Speciell für isotrope Medien ist dann

$$K \cong k\mathsf{K},$$

wobei

$$k = 1 + 4\pi h.$$

k wird im Anschluss an Maxwell *„Dielektricitätskonstante"* genannt.

17. *Elektrische Feldenergie; ponderomotorische Kräfte.* Der dielektrischen Verschiebung entspricht eine Aufspeicherung von Energie. In einfachster und in vielen Fällen genügender Annahme, darf entsprechend der Formel $F \cong e\mathsf{K}$ und der Annahme einer linearen Beziehung zwischen ε und K

$$d\mathsf{E} = d\omega \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon \mathsf{K} \cos(\varepsilon, \mathsf{K})$$

gesetzt werden, wenn $d\mathsf{E}$ die im Volumelement $d\omega$ enthaltene Energie der dielektrischen Verschiebung bedeutet. Die Energie des Systems wegen der elektrischen Fernwirkungen ist nach Art. 10

gleich $(\int d\omega \mathsf{K}^2)/8\pi$, für die gesammte elektrische Energie des Systems erhalten wir hiernach die Formel

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega \mathsf{K}^2 + \tfrac{1}{2}\int d\omega\, \varepsilon \mathsf{K} \cos(\varepsilon, \mathsf{K})$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, K \mathsf{K} \cos(K, \mathsf{K}).$$

Speciell für isotrope Medien wird

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, K \mathsf{K} = \frac{k}{8\pi}\int d\omega \mathsf{K}^2. \text{ —}$$

Die mechanischen Kräfte, welche durch die dielektrischen Verschiebungen wachgerufen werden, verändern die mechanischen Wechselwirkungen zwischen elektrisirten Theilen. Im Falle der vorhin betrachteten einfachsten Annahmen lässt sich das Resultat mit Hülfe des Princips der virtuellen Verrückungen leicht angeben. Es soll hier nur in aller Kürze der Fall eines *Systemes von Leitern in einer homogenen isotropen dielektrischen Flüssigkeit* behandelt werden. — Zunächst besteht der Satz, dass die wahre Elektricität auf der Oberfläche der Leiter bei gleichen Ladungen jederzeit gerade ebenso angeordnet ist, wie bei Abwesenheit des Dielektrikums. In der That ergiebt sich dann für die freie Elektricität nach Art. 16 überall $1/k$ der Menge, wie bei Abwesenheit der dielektrischen Verschiebung, und damit für die elektrische Kraft K eine Vertheilung, welche den Bedingungen des Systemes entspricht. Nach der zuletzt aufgestellten Formel ist unter solchen Umständen die elektrische Energie des Systemes stets $1/k$ der Energie bei Abwesenheit des Dielektrikums und daher die Arbeit der an den Leitern oder Leitertheilen angreifenden Kräfte bei jeder Verrückung oder Deformation ebenfalls $1/k$ der Arbeit bei Abwesenheit des Dielektrikums. Wir können hieraus schliessen, dass bei gleichen wahren Ladungen die ponderomotorischen Fernkräfte durch ein Zwischenmittel mit der Dielektricitätskonstanten k auf $1/k$ herabgesetzt werden. — Die Erfahrung bestätigt diese Folgerung etwa in derselben Annäherung, in welcher ε mit K proportional gesetzt werden darf, und *zeigt so die Berechtigung unserer Annahme über die Energie der dielektrischen Verschiebung.*

Da im behandelten Falle die elektrische Kraft K gerade ebenso wie die ponderomotorischen Kräfte auf $1/k$ ihres Werthes herabsinkt, so ergiebt sich für die ponderomotorische Kraft, welche ein

elektrisirtes Theilchen von Materie im Ganzen erfährt, die Formel

$$F \cong e^{(w)}\mathsf{K},$$

wobei $e^{(w)}$ die wahre Ladung bedeutet.

§ 5. Mechanische Fernwirkungen elektrischer Ströme; magnetische Kraft.

18. *Ampère'sches Elementargesetz.* Wir haben in den Elektrisirmaschinen, galvanischen Batterien, Thermoketten, Dynamomaschinen u. s. w. Mittel der mannigfachsten Art, um in Leitern elektrische Ströme dauernd zu unterhalten. Dabei zeigen sich ausser den Fernkräften, welche von den elektrischen Ladungen herrühren und dem Coulomb'schen Gesetz gehorchen, noch solche anderer Art, die unmittelbar mit der Strömung der Elektricität verknüpft scheinen. Erfahrungsgemäss werden sie durch das von Ampère[1]) formulirte und nach ihm benannte Gesetz:

$$F = 2\varkappa'^2 \frac{ds\,ds'ii'}{r^2}\left(\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' - \cos\psi\right)$$

$$= 2\varkappa'^2 \frac{d\omega\,d\omega'\gamma\gamma'}{r^2}\left(\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' - \cos\psi\right)$$

für geschlossene, stationäre Stromsysteme richtig wiedergegeben. i, ds und i', ds' sind zwei Stromfadenelemente, γ, $d\omega$ und γ', $d\omega'$ zwei räumliche Stromelemente. F ist die nach Ampère parallel der Verbindungslinie auftretende mechanische Kraft der Wechselwirkung, und zwar als Abstossung positiv, als Anziehung negativ gerechnet; r bedeutet den Abstand,

$$\vartheta \text{ ist } = \sphericalangle ds, r, \quad \vartheta' = \sphericalangle ds', r, \quad \psi = \sphericalangle ds, ds'.$$

$\varkappa'^2$ endlich stellt eine Konstante vor, die von den für Kraft, Stromstärke und Länge gewählten Einheiten abhängt.

Ampère gelangte bekanntlich zu seinem Gesetz, indem er von vorne herein annahm, dass die ponderomotorischen Kräfte in Stromsystemen in eine Wechselwirkung der Stromelemente auflösbar seien, und dass diese Wechselwirkung eine Anziehung oder Abstossung sein müsse. Wir fragen an dieser Stelle nicht weiter danach, ob diese Hypothesen berechtigt sind oder nicht, sondern begnügen uns damit, in dem Ampère'schen Gesetz eine Formel

1) Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques etc., Paris 1826.

zu sehen, welche erfahrungsmässig für stationäre Stromsysteme zu richtigen Resultaten führt.

Eine Festsetzung über die Stromeinheit bedeutet zugleich eine solche über die Elektricitätseinheit; hieraus folgt, dass zwischen der Konstanten des Ampère'schen Gesetzes $\varkappa'$ und der des Coulomb'schen Gesetzes:

$$F = \varkappa^2 \frac{ee'}{r^2}$$

$\varkappa$ ein in der Natur begründeter Zusammenhang bestehen muss. Erfahrungsmässig ist $\varkappa/\varkappa'$ *gleich der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum*:

$$\varkappa' = \frac{\varkappa}{V}.$$

Die ersten Messungen, welche zu diesem für die weitere Entwicklung der Theorie der Elektrodynamik ausserordentlich wichtigen Resultate führen, wurden 1857 von W. Weber und R. Kohlrausch veröffentlicht. Benutzt man *elektrostatisches Maass*, so ist hiernach

$$\varkappa' = \frac{1}{V}$$

zu setzen. Diejenigen Einheiten für Elektricitätsmenge und Stromstärke, welche $\varkappa' = 1$, also $\varkappa = V$ machen, heissen *„elektromagnetische Einheiten"*. — Der Uebergang zum elektromagnetischen Maass ergiebt sich, indem man setzt

$$\frac{e}{V} = e^{(m)}, \quad \frac{i}{V} = i^{(m)},$$

wobei der Index (m) elektromagnetisches Maass andeutet.

19. *Magnetische Kraft als Rechnungsgrösse.* Schon aus den von Ampère im Anschluss an die Aufstellung seines Gesetzes gegebenen Entwicklungen lässt sich entnehmen, dass es für die Fernwirkungen in Stromsystemen einen Vektor von ganz ähnlicher Bedeutung giebt, wie er für die elektrostatischen Fernkräfte in der elektrischen Kraft gefunden wurde. Dieser neue Vektor ist die *magnetische Kraft*.

Ampère zeigt in dem vorhin citirten berühmten Werke, dass die Komponenten F_x, F_y, F_z der mechanischen Kraft, welche ein Stromfadenelement i', ds' durch die Einwirkung eines geschlossenen Stromsystemes erfährt, sich bei Annahme seines Gesetzes darstellen lassen in der Form:

$$F_x = i'ds'(C\cos(ds',y) - B\cos(ds',z)),$$
$$F_y = i'ds'(A\cos(ds',z) - C\cos(ds',x)),$$
$$F_z = i'ds'(B\cos(ds',x) - A\cos(ds',y)),$$

wobei die Grössen A, B, C durch die Formeln

$$A = \varkappa'^2\int\frac{dyi}{r^2}\,\frac{z'-z}{r} - \varkappa'^2\int\frac{dzi}{r^2}\,\frac{y'-y}{r},$$

$$B = \varkappa'^2\int\frac{dzi}{r^2}\,\frac{x'-x}{r} - \varkappa'^2\int\frac{dxi}{r^2}\,\frac{z'-z}{r},$$

$$C = \varkappa'^2\int\frac{dxi}{r^2}\,\frac{y'-y}{r} - \varkappa'^2\int\frac{dyi}{r^2}\,\frac{x'-x}{r}$$

bestimmt werden und allein von dem Orte des Elementes i', ds', garnicht von seiner Stromstärke und Orientirung abhängen. Die Linie, welche durch die Grössen A, B, C bestimmt wird, wenn man diese als Komponenten eines Vektors auffasst, nennt Ampère „*Direktrix*“. Wir bezeichnen den Vektor selbst nach Multiplikation mit $-1/\varkappa'$ als „*magnetische Kraft*“ und benutzen für ihn das Symbol H. — Man wird leicht erkennen, dass die Grösse von H bei dieser Festsetzung von der Wahl der Stromeinheit unabhängig ist, insbesondere also auch für elektrostatisches und elektromagnetisches Maass gleiche Werthe erhält.

Wird der früheren Festsetzung gemäss i elektrostatisch gemessen und dementsprechend $\varkappa' = 1/V$ gesetzt, so ergeben sich für H die *Definitionsgleichungen*:

$$\mathsf{H}_x = \int\frac{ds}{r^2}\frac{i_y}{V}\cos(r,z) - \int\frac{ds}{r^2}\frac{i_z}{V}\cos(r,y) = \int\frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma_y}{V}\cos(r,z) - \int\frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma_z}{V}\cos(r,y),$$

$$\mathsf{H}_y = \int\frac{ds}{r^2}\frac{i_z}{V}\cos(r,x) - \int\frac{ds}{r^2}\frac{i_x}{V}\cos(r,z) = \int\frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma_z}{V}\cos(r,x) - \int\frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma_x}{V}\cos(r,z),$$

$$\mathsf{H}_z = \int\frac{ds}{r^2}\frac{i_x}{V}\cos(r,y) - \int\frac{ds}{r^2}\frac{i_y}{V}\cos(r,x) = \int\frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma_x}{V}\cos(r,y) - \int\frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma_y}{V}\cos(r,x).$$

i_x, i_y, i_z bedeuten hier unter Auffassung von i als Vektor

$$i\cos(ds,x),\quad i\cos(ds,y),\quad i\cos(ds,z);$$

bei der Bestimmung der Winkel (r,x), (r,y), (r,z) ist unter r diejenige Richtung zu verstehen, welche von dem Orte, für den H gesucht wird, zum Stromelement i, ds, bez. $d\omega$, γ hinführt.

Werden die Koordinatenrichtungen x, y, z gleichzeitig umgekehrt, so wechseln i_x, γ_x, $\cos(r,x)$, i_y u. s. w. gleichzeitig ihr Vorzeichen, die Komponenten H_x, H_y, H_z behalten daher ihr Vorzeichen

bei. Hieraus folgt, dass wir in der magnetischen Kraft, sowie sie uns jetzt als Rechnungsgrösse entgegentritt, einen *rotationalen Vektor*, einen *Rotor* sehen müssen.

20. *Biot-Savart'sches Gesetz.* Die Ampère'schen Rechnungen beziehen sich zwar nur auf geschlossene Stromsysteme, bei unserer Definition von H als Rechnungsgrösse sind wir hieran aber nicht gebunden; *so sollen denn die Definitionsgleichungen des vorigen Artikels als gültig für jeden beliebigen Stromtheil angesehen werden.* — Insbesondere dürfen wir sie nun auch auf einzelne Stromelemente anwenden. Die zugehörigen Formeln ergeben sich durch Fortlassen der Integralzeichen und sprechen den folgenden Satz aus, der mit Rücksicht auf die Anwendungen als *Biot-Savart'sches Gesetz* bezeichnet werden kann:

Die magnetische Kraft, welche auf Rechnung eines einzelnen Stromelementes i, ds, oder $\gamma, d\omega$ kommt, hat die Intensität

$$\mathsf{H} = \frac{ds}{r^2}\frac{i}{V}\sin(ds, r) = \frac{d\omega}{r^2}\frac{\gamma}{V}\sin(\gamma, r)$$

und steht senkrecht auf der Ebene durch r und ds, bezüglich r und γ. Von den beiden noch möglichen Drehrichtungen für H gehört zu der Formel diejenige, welche der durch ds, bezüglich γ angedeuteten entgegengesetzt ist.

Hätten wir H aus dem Ampère'schen Vektor A, B, C durch Multiplikation mit $+1/V$ statt mit $-1/V$ hervorgehen lassen, so würde sich die umgekehrte Drehrichtung ergeben haben. Die hier gewählte Festsetzung verbindet H mit dem Stromelement in analoger Weise, wie die elektrische Kraft K mit dem erregenden Element von Elektricität verbunden ist, denn zu der Formel

$$\mathsf{K} = \frac{e}{r}$$

gehört diejenige Gleitrichtung, welche der durch die Lage von e angedeuteten entgegengesetzt ist. —

Vielfach ist es bequem, H als *polaren Vektor* aufzufassen. In diesem Falle wird weiterhin zur Zuordnung eine *Rechtsschraube* benutzt werden. (Die positive Richtung des polaren Vektors bezeichnet dann diejenige, nach welcher ein *Südpol* getrieben wird; vgl. Art. 27.)

Bei der Definition der magnetischen Kraft durch das Biot-Savart'sche Gesetz gilt allgemein der folgende wichtige Satz:

Bei beliebiger Zertheilung eines Stromsystemes in Theile, die nebeneinander bestehen oder sich superponiren, ist die magnetische

Kraft des ganzen Systemes die Resultante der Kräfte, welche die Theile ergeben würden.

21. *Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes.* Für die mechanische Kraft, welche ein Stromelement i, ds oder $\gamma, d\omega$ durch die Einwirkung der übrigen erfährt, erhalten wir nach Art. 19 unter Benutzung der magnetischen Kraft folgende Darstellung:

$$F_x = ds\frac{i}{V}(\mathsf{H}_y\cos(ds,z)-\mathsf{H}_z\cos(ds,y)) = d\omega\frac{\gamma}{V}(\mathsf{H}_y\cos(\gamma,z)-\mathsf{H}_z\cos(\gamma,y)),$$

$$F_y = ds\frac{i}{V}(\mathsf{H}_z\cos(ds,x)-\mathsf{H}_x\cos(ds,z)) = d\omega\frac{\gamma}{V}(\mathsf{H}_z\cos(\gamma,x)-\mathsf{H}_x\cos(\gamma,z)),$$

$$F_z = ds\frac{i}{V}(\mathsf{H}_x\cos(ds,y)-\mathsf{H}_y\cos(ds,x)) = d\omega\frac{\gamma}{V}(\mathsf{H}_x\cos(\gamma,y)-\mathsf{H}_y\cos(\gamma,x)).$$

Hierin liegt folgender Satz, der weiterhin als *Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes* bezeichnet werden wird:

Bedeutet H die magnetische Kraft an dem Orte des Stromelementes i, ds oder $\gamma, d\omega$, so erfährt dieses eine mechanische Kraft

$$F = ds\frac{i}{V}\mathsf{H}\sin(ds,\mathsf{H}) = d\omega\frac{\gamma}{V}\mathsf{H}\sin(\gamma,\mathsf{H}),$$

die auf ds, bezüglich γ, und auf H senkrecht steht und so gerichtet ist, dass ihre Richtung aus der Richtung der zu H senkrechten Komponente des als Vektor aufgefassten Elementes ds, bezüglich von γ, durch Drehung um $\pi/2$ im Sinne von H hervorgeht.

Gemäss der hier im Anschluss an Ampère gegebenen Ableitung des Biot-Savart'schen Gesetzes und seines Komplementes ist unmittelbar ersichtlich, *dass die beiden Gesetze dem Ampère'schen Gesetze vollkommen gleichwerthig sind, wenn es sich um die Wechselwirkung zwischen einem geschlossenen Stromsystem und einem Stromelement handelt. — Die Gleichwerthigkeit hört auf, sobald an Stelle des geschlossenen Stromsystemes ein ungeschlossenes tritt:*

22. *Grassmann'sches Elementargesetz.* In der That, fügt man das Biot-Savart'sche Gesetz und sein Komplement unter Elimination der magnetischen Kraft zusammen, so ergiebt sich das folgende vom Ampère'schen weit verschiedene *Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier Stromelemente:*

Von zwei Stromelementen i, ds, i', ds' oder $\gamma, d\omega, \gamma', d\omega'$ verursacht das erste eine am zweiten angreifende mechanische Kraft, welche in der durch ds, bezüglich γ, und r gehenden Ebene $[ds, r]$, bezüglich $[\gamma, r]$, liegt, auf ds', bezüglich γ', senkrecht steht und und die Intensität

$$F = \frac{ds\,ds'}{r^2}\,\frac{i}{V}\,\frac{i'}{V'}\sin(ds,r)\cos(ds',[ds,r])$$
$$= \frac{d\omega\,d\omega'}{r^2}\,\frac{\gamma}{V}\,\frac{\gamma'}{V'}\sin(\gamma,r)\cos(\gamma',[\gamma,r])$$

besitzt. Von den beiden noch möglichen Richtungen gilt diejenige, welche die Entfernung zu vergrössern strebt oder die andere, jenachdem der Strom im ersten Element und die zur Ebene $[ds, r]$, bezüglich $[\gamma, r]$, parallele Stromkomponente des zweiten in Bezug auf den Schnittpunkt ihrer Richtungslinien ungleichsinnig oder gleichsinnig laufen. —

Dieses Gesetz wurde 1845 von Grassmann[1]) durch Anwendung der Ampère'schen Formel auf geschlossene Stromkreise gewonnen. 1868 gelangte Reynard[2]) zu ihm, indem er die Beobachtungen selbst in ähnlicher Weise wie Ampère verwerthete, jedoch von der Voraussetzung ausging, dass die elementaren Kräfte, durch das Zwischenmedium übermittelt, auf den Elementen senkrecht stehen müssten. 1875 fand es Clausius[3]) als Folgerung seines elektrodynamischen Grundgesetzes. — Den Zusammenhang mit der magnetischen Kraft scheinen alle diese Forscher nicht bemerkt zu haben.

23. *Feldgleichungen der magnetischen Kraft.* Bedeutet Γ das Maxwell'sche Vektorpotential des Stromsystemes (vgl. Art. 3) bezogen auf elektromagnetisches Maass, also auf die Ströme i/V, bezüglich γ/V:

$$\Gamma_\mu = \int \frac{ds}{r}\,\frac{i}{V}\cos(ds,\mu) = \int \frac{d\omega}{r}\,\frac{\gamma_\nu}{V},$$

so ist nach Art. 19:

$$\mathsf{H} \cong -\mathrm{Quirl}\,\Gamma,$$

und wir erhalten nach Art. 5 für *geschlossene Stromsysteme* die *differentialen Feldgleichungen:*

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{H} = 0, \qquad \mathrm{Quirl}\,\mathsf{H} \cong -4\pi\frac{\gamma}{V};$$

mit diesen gleichwerthig sind die *integralen Gleichungen:*

$$\int^{\circ} d\sigma\,\mathsf{H}_\nu = 0, \qquad \overline{\int} d\lambda\,\mathsf{H}_\lambda = -4\pi\frac{i}{V}.$$

1) Pogg. Ann. **64**, p. 4, 1845.

2) Ann. d. chim. et d. phys., IV. ser., **19**, p. 272, 1870.

3) Pogg. Ann. **156**, p. 657, 1875; vergl. Wied. Ann. **1**. p. 160, 1877.

Wird das Biot-Savart'sche Gesetz auch für *ungeschlossene Ströme* als gültig angesehen, d. h. wird den Definitionsgleichungen des Art. 19 unbeschränkte Gültigkeit zugeschrieben, so ergeben sich nach Art. 4 die *Feldgleichungen:*

$$\operatorname{Div} \mathsf{H} = 0, \qquad V \operatorname{Quirl} \mathsf{H} \cong -4\pi\gamma - \frac{d^e \mathsf{K}}{dt},$$

$$\int^{\circ} d\sigma \mathsf{H}_\nu = 0, \qquad V\overline{\int} d\lambda \mathsf{H}_\lambda = -4\pi i - \frac{d}{dt}\int d\sigma \mathsf{K}_\nu.$$

K bedeutet die elektrische Kraft, welche zur freien Elektricität gehört; es kommen dabei nur die zeitlichen Aenderungen in der Vertheilung der letzteren in Betracht, und zwar diejenigen, welche durch die Strömungen des Systemes verursacht werden. Im Innern des Stromsystemes ist zu setzen:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\operatorname{Div}\gamma, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -(\gamma_\nu)_1 - (\gamma_\nu)_2,$$

an der äusseren Grenzfläche:

$$\frac{d\eta}{dt} = +\gamma_\nu,$$

wenn unter ν die nach aussen weisende Normale verstanden wird.

Nach Art. 6 ersetzen die Feldgleichungen das Biot-Savart'sche Gesetz, wenn die Bedingung

$$\lim_{r=\infty} r^2 \mathsf{H} \text{ endlich}$$

hinzugenommen wird. Fügt man weiter noch das Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes hinzu, so ergiebt sich eine vollständige Darstellung der mechanischen Wechselwirkungen in Stromsystemen. Diese entspricht im allgemeinen Falle dem Grassmann'schen Gesetz und in dem speciellen Falle geschlossener Stromsysteme auch dem Ampère'schen Gesetz.

24. *Neumann's elektrodynamisches Potential; Stromsystem und Stromelement.* Aus dem Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes lässt sich folgern, dass die Arbeit δW der an einem Stromelement i, ds angreifenden mechanischen Kraft bei einer beliebigen unendlich kleinen virtuellen Verrückung angegeben wird durch

$$\delta W = -\frac{i}{V} d\sigma \mathsf{H}_\nu;$$

$d\sigma$ bedeutet die vom Element beschriebene Fläche, H_ν die Normalkomponente der magnetischen Kraft bezogen auf diejenige Dreh-

richtung, welche durch die positive Gleitrichtung längs ds in der Endlage als Umkreisungsrichtung von $d\sigma$ angedeutet wird.

$\int d\sigma \mathsf{H}_\nu$ ist das Flächenintegral von H, sein Werth wird also nach dem vorigen Artikel durch $-\int d\lambda \Gamma_\lambda$ angegeben; hieraus folgt

$$\delta W = \frac{i}{V}\int d\lambda \Gamma_\lambda.$$

Diese Formel stellt für die Einwirkung eines Stromsystemes auf ein Stromelement das von F. E. Neumann[1]) entdeckte „*Potentialgesetz*" der elektrodynamischen Arbeit dar. Neumann bezeichnet für zwei Stromsysteme, von denen das eine die Elemente i, ds, das andere die Elemente i', ds' umfasst, die Grösse

$$-\iint \frac{ds\,ds'}{r}\frac{i}{V}\frac{i'}{V}\cos(ds, ds') = -\iint \frac{d\omega\,d\omega'}{r}\frac{\gamma}{V}\frac{\gamma'}{V}\cos(\gamma, \gamma')$$

als *wechselseitiges elektrodynamisches Potential.* Beachten wir nun, dass

$$\iint \frac{ds\,ds'}{r}\frac{i}{V}\frac{i'}{V}\cos(ds, ds') = \int ds\frac{i}{V}\Gamma'$$

ist, so folgt nach der letzten Darstellung von δW, dass die Arbeit der an einem Element angreifenden mechanischen Kraft durch das mit umgekehrten Vorzeichen versehene elektrodynamische Potential des Stromsystemes auf den Rand der vom Element beschriebenen Fläche angegeben wird, wenn man längs diesem den Strom des Elementes in seiner Endlage fortgesetzt denkt.

25. *Neumann's elektrodynamisches Potential; zwei geschlossene Stromsysteme.* Wir stellen uns nun die Aufgabe, die gesammte Arbeitsleistung der mechanischen Kräfte festzustellen, welche durch die gegenseitige elektrodynamische Einwirkung zweier Stromsysteme auf einander verursacht wird, wenn beide beliebig verschoben und deformirt werden. Hier finden wir mit F. Neumann ein ausserordentlich einfaches Resultat, wenn vorausgesetzt wird:

1) Dass beide Stromsysteme geschlossen sind;
2) Dass die Stromkurven und also auch die Stromfadenelemente sich mit der Materie bewegen;
3) Dass die Stromstärke in jedem Stromfaden unveränderlich bleibt.

Die Verrückungen und Deformationen mögen zunächst unendlich klein angenommen werden. Um die Arbeit der an einem der beiden Stromsysteme wegen der Einwirkung des anderen angreifenden Kräfte zu finden, ist die Arbeit für die einzelnen Strom-

---

1) Abhandl. d. Berl. Ak. 1845, p. 1, 1847, p. 1.

elemente zu summiren. Die zuletzt aufgestellte Formel für δW zeigt unmittelbar, dass dabei für irgend zwei Stromelemente, von denen das eine die Fortsetzung des anderen ist, das vom Trennungspunkt beschriebene Linienelement zwei entgegengesetzt gleiche Antheile erzielt. So fallen denn diese bei der Summation über die δW heraus, und es folgt, dass die schliessliche Summe für jedes Element als Folge seiner Verrückung und Deformation nur den Betrag $\delta(ds\,\Gamma'_s)\,i/V$ in Rechnung stellt, wobei $\delta(ds\,\Gamma'_s)$ diejenige Veränderung von $ds\,\Gamma'_s = ds\int ds'\,(i'/V)\cos(ds, ds')$ bedeutet, welche durch Verrückung und Deformation von i, ds herrührt. Für die gesammte Arbeit der wechselseitigen Kräfte beider Stromsysteme erhalten wir hiernach die Formel

$$d W = \delta \iint \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds, ds'),$$

wobei δ auf der rechten Seite nun die gesammte Aenderung bezeichnet. Ohne weiteres lässt sich erkennen, dass diese Formel auch für beliebig grosse Verrückungen und Deformationen gültig bleibt. *Die mechanische Arbeit der wechselseitigen elektrodynamischen Kräfte ist also unter den eingangs angegebenen Bedingungen für zwei Stromsysteme gleich der Abnahme des wechselseitigen elektrodynamischen Potentials.* Das Potential selbst stellt die Arbeit dar, welche gewonnen wird, wenn die Stromsysteme in unendliche Entfernung von einander gerückt werden. Gerade um dieser Eigenschaften willen verwendet F. Neumann den Namen *„elektrodynamisches Potential"*, und eben darin, dass es einen Ausdruck von diesen Eigenschaften giebt, besteht wesentlich auch die Wichtigkeit seiner schönen Entdeckung.

Für die weiteren Anwendungen ist es nöthig, eine einfache Beziehung des elektrodynamischen Potentials zur magnetischen Kraft zu beachten, welche sich ergiebt, wenn eines der beiden Stromsysteme einen einfachen Stromring von nicht merklichem Querschnitt darstellt. Dann ist

$$\iint \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds, ds') = \frac{i}{V} \int ds\,\Gamma'_s$$

und nach Art. 23:

$$\int ds\,\Gamma'_s = -\int d\sigma\,\mathsf{H}'_\nu$$

wobei das Flächenintegral sich auf eine beliebige vom Stromring berandete Fläche bezieht und H' die vom anderen Stromsystem verursachte magnetische Kraft ist. *Das Neumann'sche Potential eines Stromsystemes auf eine geschlossene Linie, längs der man sich*

einen Strom von der elektromagnetischen Intensitätseinheit ($i/V = 1$) *fliessend denkt, giebt also das Flächenintegral der vom System bewirkten magnetischen Kraft für eine beliebige von der Linie begrenzte Fläche an.* —

26. *Neumann's elektrodynamisches Potential eines geschlossenen Stromsystemes auf sich selbst.* Die Ueberlegungen des vorigen Artikels lassen sich ohne weiteres auch auf die Einwirkung eines geschlossenen Stromsystemes auf sich selbst übertragen, und ergeben, wenn wieder angenommen wird, dass die Stromkurven die Bewegung der Materie mitmachen, und die Stromstärke in jedem Stromfaden unveränderlich bleibt, für die Gesammtarbeit der mechanischen Kräfte die Formel:

$$\delta V = \delta \tfrac{1}{2} \iint \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds,\, ds').$$

Die Integration ist hier sowohl für ds, wie für ds' über alle Stromfadenelemente auszudehnen;

$$-\tfrac{1}{2} \iint \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds,\, ds') = -\tfrac{1}{2} \iint \frac{d\omega\,d\omega'}{r} \frac{\gamma}{V} \frac{\gamma'}{V} \cos(\gamma,\, \gamma')$$

heisst bei dieser Festsetzung nach F. Neumann *elektrodynamisches Potential des Systemes auf sich selbst. Seine Abnahme giebt die Arbeit der elektrodynamischen ponderomotorischen Kräfte an.* — Das Potential selbst misst die Arbeit, welche die Innehaltung der angenommenen Bedingungen durch Zerstreuung des Systemes ins Unendliche gewonnen wird.

Auch für das *F. Neumann'sche elektrodynamische Potential eines Systemes auf sich selbst haben wir eine sehr wichtige und einfache Beziehung zur magnetischen Kraft zu beachten. Sie wird nach Art. 5 angegeben durch die Formel*

$$-\tfrac{1}{2} \iint \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds,\, ds') = -\tfrac{1}{2} \iint \frac{d\omega\,d\omega'}{r} \frac{\gamma}{V} \frac{\gamma'}{V} \cos(\gamma,\, \gamma')$$
$$= -\frac{1}{8\pi} \int d\omega\, \mathsf{H}^2.$$

§ 6. Magnetismus; magnetisirende und inducirende magnetische Kraft; magnetische Induktion.

27. *Bild zweier Arten von Magnetismus.* Sehen wir zunächst von den Beziehungen des Magnetismus zu den elektrischen Strömen ab, beschränken wir uns also zunächst auf die eigentlichen soge-

nannten magnetischen Erscheinungen, so bietet sich gerade wie bei der Elektricität zur bequemen Darstellung der Erfahrungsthatsachen wiederum das Bild zweier entgegengesetzter Arten von Magnetismus, des Nord- und des Südmagnetismus. *Ich werde im Folgenden den Nordmagnetismus als negativ, den Südmagnetismus als positiv bezeichnen;* es stimmt dies zwar nicht mit der gewöhnlich benutzten Nomenklatur überein, passt aber erheblich besser in das System der Elektrodynamik hinein. *Am Nordpol der Erde besitzt diese hiernach positiven Magnetismus, am Südpol negativen.*

28. *Coulomb'sches Gesetz; magnetische Kraft.* Die Theorie der magnetischen Fernwirkungen gestaltet sich nun ganz analog der der elektrischen Fernwirkungen. Auch hier gilt nach Coulomb[1]) das Gesetz

$$F = \varkappa^2 \frac{mm'}{r^2},$$

wenn m und m' zwei magnetische Massentheilchen sind, und wiederum verwandeln wir dieses durch passende Wahl der Maasseinheit in

$$F = \frac{mm'}{r^2}.$$

Wiederum ordnet sich diesem ein Vektor zu, den wir hier die *„magnetische Kraft"* nennen müssen. Von einer solchen wurde schon gesprochen; es wird sich zeigen, dass beide in der That als die gleiche Grösse angesehen werden können; nur empfiehlt es sich hier die magnetische Kraft zunächst als polaren Vektor aufzufassen, der rotationale Vektor von dem bisher die Rede war, ist diesem gemäss der Rechtsschraube zugeordnet. Als mathematisches Symbol benutzen wir wieder H.

29. *Magnetisirung; magnetisches Moment.* Ein sehr wichtiger Unterschied gegenüber dem Verhalten der Elektricität besteht bei dem Magnetismus insofern, als eine Isolirung seiner beiden Arten niemals eintritt; stets scheint jedes, auch das kleinste Theilchen von Materie beide Arten von Magnetismus in gleich grosser Menge zu enthalten, sodass seine gesammte Ladung $= 0$ ist. Hieraus ist zu schliessen, dass es *„wahren Magnetismus"* in dem Sinne, wie man von „wahrer Elektricität" spricht, überhaupt nicht giebt, und dass ein *„magnetischer Leitungsstrom"* niemals auftritt. Nur das Analogon der „dielektrischen Polarisation" kommt vor und heisst hier *„Magnetisirung"*.

---

1) Mémoires de l'Acad. Paris 1785.

Denken wir uns ein Volumelement $d\omega$ von magnetisirter Materie herausgelöst; φ sei das Potential der zugehörigen magnetischen Kraft. Wir entwickeln φ nach räumlichen Kugelfunktionen:

$$\varphi = \frac{dm}{r} + \frac{1}{r^2} X^{(1)} + \frac{1}{r^3} X^{(2)} + \cdots,$$

wobei $X^{(\nu)}$ eine Kugelflächenfunktion ν-ter Ordnung bedeutet. dm ist dann die Gesammtladung, muss also verschwinden. Abgesehen von molekularen Entfernungen ist demgemäss das nächste Glied über die Fernwirkungen entscheidend und entspricht der „*Magnetisirung*". Bekanntlich ist $X^{(1)} = M \cos\vartheta$, wobei M eine Konstante, ϑ den Winkel der Richtung, für welche $X^{(1)}$ gebildet wird, gegen eine feste Richtung bedeutet. Wir können demgemäss

$$\varphi = \frac{M}{r^2} \cos\vartheta = d\omega \frac{\mu}{r^2} \cos\vartheta$$

setzen. M heisst „*magnetisches Moment*" der Materie in $d\omega$, μ „*specifisches Moment*" der Magnetisirung an der betreffenden Stelle. μ als „Intensität" mit der festen Richtung zu einem Vektor vereinigt bildet die „*Magnetisirung*" selbst. Auch M kann entsprechend als Vektor aufgefasst werden. Es ist hiernach $\vartheta = \measuredangle(r, M)$, bezüglich $= \measuredangle(r, \mu)$

Das skalare magnetische Potential für einen endlichen Körper wird:

$$\varphi = \int d\omega \frac{\mu}{r^2} \cos(r, \mu) = \int d\omega \frac{\chi}{r} + \int d\sigma \frac{\eta}{r}.$$

Die dritte Abtheilung der Gleichung entsteht aus der zweiten durch partielle Integration. χ und η, gegeben durch

$$\chi = -\operatorname{Div} \mu, \quad \eta = \mu_\nu,$$

wenn ν die nach aussen weisende Normale bedeutet, sind die Raumdichte des „*freien Magnetismus*" im Innern und seine Flächendichte an der Grenzfläche.

Unter der Einwirkung der magnetischen Kraft erfolgt in der Regel eine Magnetisirung oder eine Veränderung der schon vorhandenen Magnetisirung. Oft ist es erlaubt die erregte Magnetisirung linear abhängig von der magnetischen Kraft zu setzen, sodass speciell für isotrope Körper die Formel

$$\mu = s\mathsf{H}$$

entsteht. Der Faktor s heisst dann — nach Maxwell — „*magnetische Susceptibilität*".

30. *Magnetische Induktion, inducirende magnetische Kraft.* Formulirt man den Erfahrungssatz, dass der wahre Magnetismus überall = 0 ist, analytisch, indem man entsprechende Rechnungen anstellt wie in Art. 16, so ergiebt sich für alle geschlossenen Flächen die Formel:

$$\int^{\circ} d\lambda\, H_\lambda = 0;$$

wenn H die Resultante von H und $4\pi\mu$ darstellt:

$$H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu.$$

H heisst nach Maxwell „*magnetische Induktion*"; im Folgenden wird sie auch „*inducirende magnetische Kraft*" genannt werden. (Vergl. Art. 33.)

Darf μ linear abhängig von H gesetzt werden, so gilt das Gleiche auch von H. Speciell für isotrope Medien besteht dann die Beziehung:

$$H \cong p\mathsf{H},$$

wenn

$$p = 1 + 4\pi s$$

ist; p heisst nach Maxwell „magnetische Permeabilität".

31. *Wechselwirkung zwischen Magneten und elektrischen Strömen.* Die mechanische Fernwirkung eines Stromsystemes auf einen Magneten lässt sich am einfachsten und bequemsten durch das *Biot-Savart'sche Elementargesetz*[1]) darstellen: Die Einwirkung erfolgt danach so, als ob ein jedes Stromelement i, ds bezüglich γ, $d\omega$ auf ein magnetisches Theilchen dm eine an diesem selbst angreifende mechanische Kraft von der Intensität

$$dF = dm \frac{ds}{r^2} \frac{i}{V} \sin(ds, r) = dm \frac{d\omega}{r^2} \frac{\gamma}{V} \sin(\gamma, r)$$

ausübt, die auf der Ebene (ds, r), (γ, r) senkrecht steht und so gerichtet ist, dass sie für einen im Strome schwimmenden und dem magnetischen Theilchen zugewendeten Beobachter nach links oder rechts gerichtet scheint, jenachdem es Nord- oder Südmagnetismus enthält. — Die Einwirkung des Magneten auf den Stromkreis wird durch das *Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes* angegeben, welches aussagt, dass sie so erfolgt, als ob das magnetische Theilchen seinerseits auf das Stromelement eine an diesem selbst angreifende, gleich grosse aber entgegengesetzt gerichtete Kraft ausübt.

---

1) Wurde etwa gleichzeitig mit dem Ampère'schen Elementargesetz aufgestellt; vergl. Ampère, Théorie math. etc. 1826.

Verwerthet man den Begriff der magnetischen Kraft, wie er sich im Anschluss an die rein magnetischen Fernwirkungen ergiebt, so nehmen das Biot-Savart'sche Gesetz und sein Komplement eben diejenige Formulirung an, welche ihnen in Art. 20 und 21 gegeben wurde, wo es sich nur um die Feststellung der Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen handelte. Die letztere entspricht hiernach qualitativ und quantitativ genau der Wechselwirkung zwischen Magneten und Strömen und zwischen Magneten unter sich.

32. *Ampère's Theorie des Magnetismus.* Für diese weittragende Erfahrungsthatsache hat Ampère eine sehr glückliche Formulirung angegeben, welche aussagt, dass die magnetischen Erscheinungen gerade so verlaufen, *als ob ein jedes kleinste Theilchen eines magnetischen Mediums ein geschlossenes elektrisches Stromsystem enthält und eben deswegen „magnetisirt“ erscheint.* Nicht nur erklärt sich damit sofort und vollständig die Verkettung der ponderomotorischen Fernwirkungen in elektrischen, magnetischen und gemischten Systemen, sondern es ergiebt sich auch, wie noch in diesem Artikel gezeigt werden wird, eine Begründung der Abwesenheit des wahren Magnetismus, und, wie wir später erkennen werden, eine der Wirklichkeit genau entsprechende Darstellung des Verhaltens des Magnetismus bei der elektrodynamischen Induktion. — Die gewaltigen Gebiete der elektrischen und magnetischen Erscheinungen werden so zu einem einzigen verschmolzen.

Angesichts dieser schönen Förderung unserer Erkenntniss ist es sehr bemerkenswerth, dass gerade die Untersuchungen Ampère's in hohem Maasse dazu beigetragen haben, die Aufmerksamkeit von dem heute für den ganzen Auffassungskreis so bedeutsamen Vektor der magnetischen Kraft abzulenken. —

Von der näheren Begründung der Behauptung, dass durch die Annahme molekularer geschlossener Stromsysteme die magnetischen Fernwirkungen erklärt werden, kann an dieser Stelle abgesehen werden, da wir für die Theorie der Elektrodynamik keine wesentlich neuen Gesichtspunkte gewinnen würden. Nur der Nachweis soll geführt werden, dass sich für die durch ein Element magnetisirter Materie erregte Vertheilung der magnetischen Kraft die Gesetze der Erfahrung ergeben.

Nach Art. 23 gelten bei einem beliebigen Stromsystem für die zugehörige magnetische Kraft die Formeln

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{H} = 0, \qquad \int^{\infty} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu = 0;$$

die letzte von diesen besagt bei Anwendung auf Flächen, welche

das System völlig umschliessen, dass die Gesammt-Ladung an Magnetismus verschwindet, *und liefert so das Gesetz der Abwesenheit von wahrem Magnetismus.* — In der *Umgebung* eines geschlossenen Systemes, d. h. ausserhalb des Bereiches seiner Ströme, ist nach Art. 23:

$$\text{Quirl}\,\mathsf{H} = 0,$$

es besteht also ein skalares Potential. — Hiermit sind die charakteristischen Bedingungen für die durch ein Volumenelement Materie bewirkte Vertheilung der magnetischen Kraft festgestellt. — Für das „*magnetische Moment*“ ergiebt eine Rechnung mit Hülfe der Kugelfunktionen die Bestimmungsgleichungen:

$$M_x = \int ds\,(i_y z - i_z y) = \int d\omega\,(\gamma_y z - \gamma_z y),$$
$$M_y = \int ds\,(i_z x - i_x z) = \int d\omega\,(\gamma_z x - \gamma_x z),$$
$$M_z = \int ds\,(i_x y - i_y x) = \int d\omega\,(\gamma_x y - \gamma_y x),$$

wenn x, y, z als selbständige Grössen die Koordinaten der Stromelemente bedeuten.

33. *Inducirende und magnetisirende magnetische Kraft.* Welcher Vektor soll innerhalb magnetisirter Materie als magnetische Kraft bezeichnet werden? Bei der Beantwortung dieser Frage werden wir durch die Ampère'sche Vorstellung der molekularen Stromsysteme zunächst zu einer eigenthümlichen Schwierigkeit geführt. In der That, die gewöhnlich magnetische Kraft genannte Grösse, welche durch den freien Magnetismus bestimmt wird, erfüllt ja die Gleichungen

$$\text{Div}\,\mathsf{H} = 4\pi\chi, \qquad \text{Quirl}\,\mathsf{H} = 0$$

widerspricht also den Bedingungen, welche für die magnetische Kraft in Stromsystemen gefunden wurden:

$$\text{Div}\,\mathsf{H} = 0, \qquad \text{Quirl}\,\mathsf{H} = -4\pi\gamma.$$

Die Rechnungsgrösse H des Bildes der magnetischen Fluida passt also zunächst nicht für die Vorstellung molekularer Stromsysteme.

Indem wir daran gehen, eine für diese zweckentsprechende Rechnungsgrösse aufzusuchen, mag zunächst bemerkt werden, dass die beiden Anschauungen nur innerhalb der magnetisirten Materie selbst verschiedene Resultate ergeben, dass es sich also nur um eine verschiedene Fortsetzung der ausserhalb der magnetisirten Materie fest gegebenen Vektorvertheilung ins Innere hinein handelt.

Bedeutet H' provisorisch die gesuchte neue magnetische Kraft, so muss verlangt werden, dass überall

$$\operatorname{Div} \mathsf{H}' = 0, \quad \text{also} \int^{\circ} d\sigma\, \mathsf{H}'_{\nu} = 0$$

ist. Nach der letzteren Gleichung darf die Normalkomponente von H' an den Grenzen der magnetisirten Materie gegen nicht magnetisirten Raum keinen der Magnetisirung entsprechenden Sprung zeigen. Damit ist ein Weg gewiesen, H' zu finden. Man denke sich innerhalb der magnetisirten Materie eine unendlich dünne Schicht entmagnetisirt, während alles Uebrige unverändert bleibt: Die magnetische Kraft im Innern, für welche beide Vorstellungen den gleichen Werth ergeben, hat dann eben dieselbe Normalkomponente, welche dem Vektor H' zugeschrieben werden muss. — Bekannte Rechnungen ergeben, dass die magnetische Kraft in der Schicht dann gerade gleich der magnetischen Kraft in der magnetisirten Materie wird, wenn man die Schicht parallel μ orientirt. Senkrecht zu μ haben also H und H' gleiche Komponenten. — Wird die Schicht senkrecht zu μ gelegt, so bildet die magnetische Kraft in ihr die Resultante von H und $4\pi\mu$; die zu μ parallele Komponente von H' muss sich also von der entsprechenden H-Komponente um $4\pi\mu$ unterscheiden. Beide Folgerungen zusammengenommen ergeben H' als Resultante von H und $4\pi\mu$; *der gesuchte Vektor ist demnach nichts anderes als die schon früher von uns gefundene magnetische Induktion:*

$$H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu.$$

In der That erfüllt H, wie wir schon wissen (Art. 30), die Bedingung

$$\int^{\circ} d\sigma\, H_{\nu} = 0.$$

Die für Stromsysteme gültige Gleichung

$$4\pi \frac{\gamma}{V} = -\operatorname{Quirl} \mathsf{H},$$

ergiebt uns hier in der Form

$$4\pi \frac{\gamma}{V} = -\operatorname{Quirl} H = -4\pi \operatorname{Quirl} \mu,$$

oder in

$$\frac{\gamma}{V} = -\operatorname{Quirl} \mu, \qquad \frac{i}{V} = -\int d\lambda\, \mu_{\lambda}$$

eine Bestimmung des mit dem magnetischen Körper äquivalenten Stromsystemes. Dabei wird deutlich, dass unter H, bezüglich unter γ

und i in den letzten Gleichungen nur gewisse summarische Mittelwerthe zu verstehen sind. Etwas anderes kann bei der Annahme von Molekularmagneten natürlich auch H nicht bedeuten. Bemerkt mag schliesslich noch werden, dass die Formeln für γ und i sich auch leicht direkt ableiten lassen, wenn man von den molekularen Stromsystemen ausgeht [1]).

Der nach allgemeiner Sitte kurzweg magnetische Kraft genannte Vektor H verdient dieses Vorrecht insofern, als er erfahrungsmässig bei den stark magnetisirbaren Materialen die Magnetisirung bestimmt. Andererseits werden wir im folgenden Paragraphen erkennen, dass für die elektrodynamische Induktion H entscheidend ist. Mit Rücksicht auf diese Verhältnisse könnte man sowohl H wie H „magnetische Kraft" nennen und dann zur Unterscheidung für H und H die genaueren Bezeichnungen „*magnetisirende magnetische Kraft*" und „*inducirende magnetische Kraft*" gebrauchen. — Die innige Beziehung der Magnetisirung zu H hat seinen Grund wahrscheinlich darin, dass die molekularen Stromsysteme sich in den stark magnetisirbaren Materialien in Ketten anordnen.

34. *Feldgleichungen für* H und H. Handelt es sich nur um geschlossene galvanische Ströme, so sind H und H, die im Allgemeinen durch die Beziehung:

$$H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu$$

miteinander verbunden sind, überall identisch, und es gelten die Gleichungen des Art. 23

$$\operatorname{Div} \mathsf{H} = 0, \qquad \operatorname{Quirl} \mathsf{H} = -4\pi \frac{\gamma}{V},$$

$$\int^{\circ} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu = 0, \qquad \overline{\int} d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda = -4\pi \frac{i}{V}.$$

Handelt es sich andererseits nur um Magnetisirung, so ist nach den Art. 28—30 in Verbindung mit Art. 2:

$$\operatorname{Div} \mathsf{H} = -4\pi \operatorname{Div} \mu = 4\pi\chi, \qquad \operatorname{Quirl} \mathsf{H} = 0,$$

$$\operatorname{Div} H = 0, \qquad \operatorname{Quirl} H = 4\pi \operatorname{Quirl} \mu,$$

also

$$\overline{\int} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu = -4\pi \overline{\int} d\sigma\, \mu_\nu = 4\pi m, \qquad \int^{\circ} d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda = 0,$$

$$\int^{\circ} d\sigma\, H_\nu = 0, \qquad \int^{\circ} d\lambda\, H_\lambda = 4\pi \int^{\circ} d\lambda\, \mu_\lambda.$$

1) E. Wiechert, Wied. Ann. 59, p. 301, 1896.

Sind geschlossene galvanische Ströme und Magnetisirung gleichzeitig wirksam, so wird

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{H} = -4\pi\,\mathrm{Div}\,\mu = 4\pi\chi, \qquad \mathrm{Quirl}\,\mathsf{H} = -4\pi\frac{\gamma}{V},$$

$$\mathrm{Div}\,H = 0, \qquad \mathrm{Quirl}\,H = -4\pi\frac{\gamma}{V} + 4\pi\,\mathrm{Quirl}\,\mu,$$

also

$$\overline{\int} d\sigma\,\mathsf{H}_\nu = -4\pi\overline{\int} d\sigma\,\mu_\nu = 4\pi m, \qquad \overline{\int} d\lambda\,\mathsf{H}_\lambda = -4\pi\frac{i}{V},$$

$$\int^{0} d\sigma\,H_\nu = 0, \qquad \overline{\int} d\lambda\,H_\lambda = -4\pi\frac{i}{V} + 4\pi\overline{\int} d\lambda\,\mu_\lambda.$$

Werden auch offene Ströme zugelassen, so folgt gemäss Art. 23 bei Anerkennung des Biot-Savart'schen Gesetzes:

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{H} = -4\pi\,\mathrm{Div}\,\mu = 4\pi\chi, \qquad \mathrm{Quirl}\,\mathsf{H} = -4\pi\frac{\gamma}{V} - \frac{1}{V}\frac{d^{a}\mathsf{K}}{dt},$$

$$\mathrm{Div}\,H = 0, \qquad \mathrm{Quirl}\,H = -4\pi\frac{\gamma}{V} - \frac{1}{V}\frac{d^{a}\mathsf{K}}{dt} + 4\pi\,\mathrm{Quirl}\,\mu,$$

also:

$$\overline{\int} d\sigma\,\mathsf{H}_\nu = -4\pi\overline{\int} d\sigma\,\mu_\nu = 4\pi m,$$

$$\overline{\int} d\lambda\,\mathsf{H}_\lambda = -4\pi\frac{i}{V} - \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\int d\sigma\,\mathsf{K}_\nu,$$

$$\int^{0} d\sigma\,H_\nu = 0, \qquad \overline{\int} d\lambda\,H_\lambda = -4\pi\frac{i}{V} - \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\int d\sigma\,\mathsf{K}_\nu + 4\pi\overline{\int} d\lambda\,\mu_\lambda.$$

K bedeutet die zur freien Elektricität gehörige elektrische Kraft. — *Der Leser wird erkennen, dass wir hier einen Theil der Hertz-Heaviside'schen Gleichungen vor uns haben.*

Nehmen wir die Bedingungen

$$\lim_{r=\infty} r^{2}\,\mathsf{H} \text{ endlich}, \qquad \lim_{r=\infty} r^{2}\,H \text{ endlich},$$

hinzu, so werden die Vektoren H und H durch diese Gleichungen völlig bestimmt. —

§ 7. Elektromagnetische Induktion.

35. Faraday's *Formulirung der Gesetze der elektromagnetischen Induktion.* Sogleich nach Veröffentlichung seiner Entdeckung der elektromagnetischen Induktion[1]) gab Faraday eine auch in

1) Nov. 1831. Exp. Rech. in Electricity, Art. 1—139.

quantitativer Hinsicht hinreichende Formulirung der Gesetze [1]), die er später [2]) noch genauer ausführte.

Das Wesentliche der Faraday'schen Theorie besteht in der Verknüpfung der elektromagnetischen Induktion mit den magnetischen Kraftlinien. Die letzteren fasst er dabei nicht nur als geometrische Linien, sondern auch als quantitative Grössen auf. Er spricht von *„amount of force"* oder *„amount of lines of force"* oder *„number of lines of force"*. Es ist damit nach unserer Bezeichnungsweise das Flächenintegral des Vektors gemeint, und zwar kommt innerhalb magnetisirter Medien nicht die gewöhnliche magnetische Kraft H, sondern die inducirende magnetische Kraft H in Betracht. Die *„Menge der magnetischen Kraftlinien"* wird also allgemein durch

$$\int ds\, H_\nu$$

angegeben.

Die *Faraday'schen Gesetze der elektromagnetischen Induktion* sind nun folgende:

Durch Bewegung und Deformation eines offenen linearen Leiters wird in ihm eine elektromotorische Kraft E inducirt, die proportional ist mit der in der Zeiteinheit geschnittenen Menge von magnetischen Kraftlinien und durch diese allein bestimmt wird:

$$E = \frac{\alpha^2}{V} \frac{d}{dt} \int d\sigma\, H_\nu.$$

Das Integral rechts bedeutet dabei die Menge der von einer beliebigen Zeit ab geschnittenen Kraftlinien; für ν ist diejenige Drehrichtung zu nehmen, welche durch E in der Endlage des Leiters als Umkreisungsrichtung der beschriebenen Fläche angedeutet wird. α^2 ist eine gewisse universelle Konstante, deren Werth sich in Art. 40 als 1 herausstellen wird.

Die in einem geschlossenen linearen Leiter inducirte elektromotorische Kraft im allgemeinen Falle beliebiger Bewegungen und Deformationen des Leiters selbst und beliebiger Veränderungen von elektrischen Stromsystemen und magnetischen Medien in seiner Umgebung ist proportional mit der Geschwindigkeit der Vermehrung der umschlossenen Menge von Kraftlinien. Da hierbei wegen des vorigen Satzes wiederum der gleiche Proportionalitätsfaktor auftreten muss, kommt eben dieselbe Formel zur Geltung wie vorhin. —

---

1) Dez. 1831. ibid. Art. 140—264; vergl. insb. Art. 231—242.

2) Oct. 1851. ibid. Art. 3070—3176.

Faraday meint, dass es auch im allgemeinen Falle auf das Hindurchtreten der magnetischen Kraftlinien ankäme, die man sich im Raume beweglich denken müsse. Er führt diese Anschauung aber nicht im Einzelnen aus; so bleibt es denn auch ungewiss, welchen Werth die elektromotorische Kraft im allgemeinen Falle in einem offenen linearen Leiter annimmt. — Im Anschluss an die Maxwell'sche Theorie haben später Poynting[1]) und J. J. Thomson[2]) gezeigt, dass man den Faraday'schen Gedanken in der That sehr weitgehend durchführen kann.

36. *F. E. Neumann's Formulirung der Gesetze der elektromagnetischen Induktion.* F. E. Neumann[3]) ging von dem Lenz'schen Satze aus, dass der durch Bewegung inducirte Strom die Bewegung allemal zu hemmen sucht, und knüpfte daran die Hypothese, dass die bei Bewegung eines linearen Leiters in ihm inducirte elektromotorische Kraft der Arbeit proportional ist, welche die ponderomotorischen Kräfte leisten müssten, wenn der Leiter einen elektrischen Strom enthielte. Unter Rücksicht auf Art. 24 ist hiernach für einen offenen Leiter zu setzen:

$$E dt = -\frac{\alpha^2}{V}\int \overline{d\lambda\, \Gamma_\lambda}.$$

E bedeutet die durch Bewegung des Leiters in ihm inducirte elektromotorische Kraft, α^2 wieder eine universelle Konstante und zwar, wie wir sogleich erkennen werden, dieselbe wie vorhin. Rechts steht das mit α^2 multiplicirte Neumann'sche elektrodynamische Potential des Stromsystemes auf einen Strom von der Intensität 1 längs der Randkurve der vom Leiter während dt beschriebenen Fläche[4]). Für E gilt diejenige Richtung, welche in der *Endlage* des Leiters der Richtung des Randstromes entspricht.

Für einen geschlossenen linearen Leiter ergiebt sich als Folge der Bewegung:

$$E = -\frac{\alpha^2}{V}\frac{d}{dt}\int^0 d\lambda\, \Gamma_\lambda,$$

wobei nur diejenige Aenderung des elektrodynamischen Potentials zu berücksichtigen ist, die auf Rechnung der Bewegung des Leiters selbst kommt.

---

1) Phil. Trans. Lond, 176, II, p. 277, 1885.

2) Phil. Mag. (5), 31, p. 149, 1891; Notes on Recent Recherches in Electricity and Magnetism, Oxford 1893, Ch. I.

3) Abh. d. Berl. Ak. d. W., 1845 p. 1, 1847, p. 1.

4) Vergl. Seite 12 der zweiten citirten Abhandlung.

Aus den Erfahrungsthatsachen, dass für die inducirte elektromotorische Kraft nur die relative Bewegung des Leiters und des inducirenden Systemes wesentlich ist, und dass das Zeitintegral der elektromotorischen Kraft für einen geschlossenen Leiter allein durch Anfangs- und Endzustand des gesammten Systemes bestimmt wird, schliesst *F. E. Neumann*, *dass die letzte Formel auch im allgemeinen Falle der Induktion für die im Ganzen inducirte elektromotorische Kraft gültig ist.*

Der allgemeine Fall der Induktion für einen *offenen* Leiter bleibt auch bei F. E. Neumann gerade so wie bei Faraday ausserhalb der Untersuchung. Es ergiebt sich also beide Male der gleiche Gültigkeitsbereich der Gesetze.

Wir haben in Art. 25 festgestellt, dass das Neumann'sche Potential eines Stromsystemes auf einen linearen Strom von der Intensität i gleich dem mit i/V multiplicirten Flächenintegral der magnetischen Kraft ist; im Falle die Fläche durch magnetisirte Materie hindurchgeht, ist hierbei die *inducirende* magnetische Kraft H zu wählen, weil nur dann das Integral gleich dem für eine ausserhalb des magnetisirten Gebietes verlaufende Fläche wird, auf das sich unser Satz zunächst bezieht. Hieraus und aus der eben gemachten Bemerkung folgt sogleich, *dass die Induktionsgesetze von Faraday und F. E. Neumann genau gleichwerthig sind.* Soweit unsere Erfahrungen reichen, stellen sie die Erscheinungen der gewöhnlichen Elektrodynamik (d. h. der Elektrodynamik mit Ausschluss der Hertz'schen Schwingungen etc.) in allen Einzelheiten völlig getreu dar. Insbesondere werden auch die Gesetze für bewegte offene Leiter durch Versuche von v. Helmholtz[1]) bestätigt.

37. *Inducirte elektrische Kraft und ihre Feldgleichungen.* Aus den Gesetzen von Faraday und F. E. Neumann lässt sich bei Anwendung auf beliebige Kurven leicht folgern, dass die *inducirte elektromotorische Kraft* als das Linienintegral einer *inducirten elektrischen Kraft* aufgefasst werden kann, die von dem Verlaufe der gerade gewählten Kurven unabhängig ist.

Es ist am bequemsten, die gesammte inducirte elektrische Kraft in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine der Bewegung der Materie an der betreffenden Stelle selbst entspricht, und die andere der Veränderung der Vertheilung des Vektorpotentials, bezüglich der inducirenden magnetischen Kraft, bezogen auf die

1) Monatsberichte d. Berl. Ak. Juni 1875, Pogg. Ann. 158 p. 87, 1876, ges. Abh. I p. 774.

Punkte eines im Raume fest gedachten Koordinatensystemes und nicht auf Punkte, welche in der Materie definirt sind. Wir werden die erstere *die infolge der Bewegung der Materie im Felde der magnetischen Kraft inducirte elektrische Kraft* und die letztere *die infolge der Veränderung des Feldes inducirte Kraft* nennen.

Wie aus dem betreffenden Faraday'schen Gesetze leicht ersichtlich ist, hat die *infolge der Bewegung* der Materie im magnetischen Felde *inducirte elektrische Kraft* die Intensität

$$\mathsf{K} = \alpha^2 \frac{v}{V} H \sin(v, H),$$

wobei v die Geschwindigkeit der Materie bedeutet, und steht senkrecht auf H sowohl wie auf v. Von den beiden Richtungen dieser Art gilt diejenige, welche aus der zu H senkrechten Komponente von v durch Drehung im Sinne von H um $\pi/2$ hervorgeht.

Die zweite Komponente der inducirten elektrischen Kraft erhalten wir nicht selbst, weil für sie nur die elektromotorische Kraft in geschlossenen Linien bekannt ist. So ergiebt sich nur der folgende *Satz über das Linienintegral der durch Veränderungen des magnetischen Feldes inducirten elektrischen Kraft für geschlossene Linien:*

$$\overline{\int} d\lambda \mathsf{K}_\lambda = \frac{\alpha^2}{V} \frac{d}{dt} \overline{\int} d\sigma H_\nu = -\frac{\alpha^2}{V} \frac{d}{dt} \overline{\int} d\lambda \Gamma_\lambda,$$

der aussagt:

$$\text{Quirl}\, \mathsf{K} \cong \frac{\alpha^2}{V} \frac{d^* H}{dt} \cong -\frac{\alpha^2}{V} \frac{d}{dt} \text{Quirl}\, \Gamma.$$

Hiermit ist auch der zweite Theil der Hertz-Heaviside'schen Gleichungen gewonnen, deren erster Theil uns das Biot-Savart-sche Gesetz in Art. 34 ergab.

Die letzte Formel in Verbindung mit Art. 6 lässt deutlich erkennen, worin unsere Unsicherheit über die inducirte elektrische Kraft besteht: *Es fehlt uns eine Angabe über die Divergenz ihrer Vertheilung, und wir erhalten daher*

$$\mathsf{K} \cong -\frac{\alpha^2}{V} \frac{d^* \Gamma}{dt} + \mathsf{K}^*,$$

wobei K^* *einen unbekannten Vektor bedeutet, der zu einen skalaren Potential gehört.*

38. *Elementargesetz von C. Neumann für die inducirte elektrische Kraft.* In dem Werke „Die elektrischen Kräfte, Darlegung etc.", Leipzig, I. Th. 1873 stellt C. Neumann sich die Aufgabe, ausge-

hend von möglichst einfachen allgemeinen Grundsätzen auch im allgemeinen Falle der Induktion die inducirte elektrische Kraft selbst zu finden. Sein Resultat ist folgendes *Elementargesetz:*

Die elektrische Kraft, welche ein Stromelement i, ds in irgend einem Punkte P eines materiellen Körpers inducirt, ist zerlegbar in zwei Kräfte

$$-\frac{\alpha^2}{V} ds \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt}(r\, i \cos(r, ds)) \text{ und } + \frac{\alpha^2}{V} ds \frac{i\, dr}{r^2},$$

erstere gerechnet in der Richtung $r\,(ds \rightarrow P)$, letztere gerechnet in der Richtung i.

Für geschlossene Stromringe giebt dieses Gesetz seiner Ableitung gemäss eben dieselben elektromotorischen Kräfte wie die Gesetze von F. E. Neumann und Faraday. —

39. *Elektromagnetische Arbeit.* Die inducirte elektromotorische Kraft hat einen Austausch elektrodynamischer Energie mit äusserer Energie — chemischer etc. — zur Folge, der zu demjenigen hinzutritt, welchen die elektrodynamischen ponderomotorischen Kräfte verursachen; wir wollen nach dem Gesammtresultat beider fragen, und dabei der Einfachheit wegen *reine Stromsysteme*, also *Abwesenheit von Magnetisirung* voraussetzen.

Die in einem Stromelement i, ds während des Zeitelementes dt auf den Strom abgegebene elektrodynamische Energie infolge der inducirten elektrischen Kraft K ist gemäss den Bedeutungen von i und K:

$$dW = ds\, \mathsf{K}_s i\, dt = Ei\, dt.$$

Betrachten wir nun zunächst die Wirkung der Bewegung der Materie im magnetischen Felde. Hier erhalten wir nach Art. 35

$$dW = \alpha^2 \frac{i}{V} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu.$$

Nach Art. 24 ist die gleichzeitige Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

$$dW = -\frac{i}{V} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu.$$

Die gesammte infolge der Bewegung des Stromelementes i, ds in diesem selbst abgegebene elektrodynamische Energie ist also:

$$dW = (\alpha^2 - 1) \frac{i}{V} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu = -(\alpha^2 - 1) \frac{i}{V} \int d\lambda\, \Gamma_\lambda.$$

Für die entsprechende in einem geschlossenen Stromsysteme im

Ganzen abgegebene elektrodynamische Energie folgt ähnlich wie in Art. 26:

$$dW = -(\alpha^2-1)\,d\tfrac{1}{2}\iint\frac{ds\,ds'}{r^2}\,\frac{i}{V}\,\frac{i'}{V}\cos(ds,\,ds'),$$

wobei wiederum wie dort allein auf diejenige Aenderung des Doppelintegrales Rücksicht zu nehmen ist, welche auf Rechnung der Verschiebungen der Stromelemente kommt, und nicht auf diejenige infolge von Intensitätsänderungen.

In Bezug auf den zweiten Theil der inducirten elektrischen Kraft, den wir gemäss Art. 37 als Folge der Aenderung des Feldes von H betrachten, soll entsprechend dem Gültigkeitsbereich der Gesetze von Faraday und F. E. Neumann sogleich nach der elektrodynamischen Arbeit in geschlossenen Stromsystemen gefragt werden. Nach Art. 37 ist es dann erlaubt

$$\mathsf{K} \cong -\frac{\alpha^2}{V}\frac{d^*\Gamma}{dt}$$

zu setzen, weil die Antheile von K^* sich herausheben. Es mag noch ausdrücklich betont werden, dass Γ hier auf eine bestimmte Stelle im Raume und nicht auf einen gegenüber der Materie definirten Punkt zu beziehen ist.

Eine Aenderung von Γ wird durch Bewegung der Stromelemente mit der Materie und durch Aenderung des Stromsystemes in der Materie verursacht. Bei Trennung beider Einflüsse ergiebt sich zunächst für den ersten als elektrodynamische Arbeit im Stromelement i, ds:

$$dW = -\alpha^2\,ds\,\frac{i}{V}\,d\Gamma_s,$$

wobei nur diejenige Aenderung von Γ in Betracht kommt, welche durch die Bewegungen der Elemente ausser i, ds bewirkt wird. Für die Arbeit im ganzen Stromsystem folgt

$$dW = -\alpha^2\,d\tfrac{1}{2}\iint\frac{ds\,ds'}{r}\,\frac{i}{V}\,\frac{i'}{V}\cos(ds,\,ds'),$$

wenn wiederum nur diejenige Aenderung des Doppelintegrales berücksichtigt wird, welche durch die Verschiebung der Stromelemente verursacht wird.

Als Folge der Aenderung des Stromsystemes innerhalb der Materie ergiebt sich durch entsprechende Rechnungen die gleiche Formel, nur dass dann die Veränderung des Doppelintegrales infolge der Stromänderungen gemeint ist.

Durch Addition der beiden nach ihrer Bedeutung verschiedenen Formeln entsteht dieselbe Formel äusserlich zum dritten Male und besagt nun, dass dW die gesammte Arbeit der inducirten elektromotorischen Kräfte im System wegen der Aenderung des magnetischen Kraftfeldes angiebt, wenn rechts die vollständige Aenderung des Doppelintegrales in Rechnung gesetzt wird.

Die gewonnenen Resultate mögen nun zusammengestellt werden:

Stellt

$$P = -\tfrac{1}{2}\iint \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds, ds')$$

das Neumann'sche elektrodynamische Potential des Systemes auf sich selbst dar, so ist

$$dW = (\alpha^2 - 1)\,dP$$

die im System durch ponderomotorische Kräfte und durch Induktion infolge der Bewegung der Materie im magnetischen Felde abgegebene elektrodynamische Energie, wenn unter dP nur die Veränderung infolge der Bewegung der Stromelemente verstanden wird; und es ist ferner

$$dW = \alpha^2\,dP$$

die im System durch Induktion infolge der Veränderungen des magnetischen Kraftfeldes abgegebene elektrodynamische Energie, wenn unter dP die ganze Aenderung verstanden wird.

40. *Induktionskonstante α^2; magnetische Energie eines Stromsystemes. Erfahrungsmässig ist*

$$\alpha^2 = 1.$$

Dieses ausserordentlich wichtige Resultat kann als Folgerung des Satzes von der Erhaltung der Energie hingestellt werden, wobei v. Helmholtz den Weg gewiesen hat[1]). Wir werden hierauf sogleich zu sprechen kommen, wollen aber vorher einige unmittelbare Folgerungen betrachten.

Zunächst ergiebt sich, dass die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte jederzeit genau diejenige kompensirt, welche von den durch Bewegung der Materie im magnetischen Felde inducirten elektrischen Kräften herrührt. Aber noch mehr! Da nach den Erfahrungen zu urtheilen die F. E. Neumann'schen und Faraday'schen Gesetze auch für die in einzelnen Stromelementen wirksamen ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte die

1) In der Abh. „Ueber die Erhaltung der Kraft", 1847; Ges. Abh. I, p. 12.

richtigen Werthe ergeben[1]), und daher gemäss des vorigen Artikels für einzelne Stromelemente die Formel

$$dW = (\alpha^2 - 1)\frac{i}{V}\,d\sigma\,\mathsf{H},$$

anzunehmen ist, *gewinnen wir den Eindruck, dass bei Bewegung von Materie im magnetischen Felde, die Arbeit der hierdurch ins Spiel kommenden ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte sich jederzeit an jeder einzelnen Stelle gerade zu Null ergänzt.* Hieran wird für die allgemeine Theorie der Elektrodynamik weiterhin eine Bemerkung von besonderer Wichtigkeit geknüpft werden können.

Für die Arbeit dW der elektromotorischen Kräfte, welche durch Veränderungen des magnetischen Kraftfeldes inducirt werden, ergiebt sich nun

$$dW = dP,$$

und es wird damit zugleich die gesammte Arbeit der ponderomotorischen und inducirten elektromotorischen Kräfte dargestellt. Berücksichtigen wir allein diese elektrodynamischen Wirkungen, *so scheint hiernach das Stromsystem eine latente Energie im Betrage von*

$$\mathsf{E} = -P = \tfrac{1}{2}\iint \frac{ds\,ds'}{r}\frac{i}{V}\frac{i'}{V}\cos(ds, ds') = \tfrac{1}{2}\iint \frac{d\omega\,d\omega'}{r}\frac{\gamma}{V}\frac{\gamma'}{V}\cos(\gamma, \gamma')$$

zu enthalten. Wird nur das Gesammtresultat ins Auge gefasst, so können wir sagen, dass der Austausch dieser Energie durch die ponderomotorischen und inducirten elektromotorischen Kräfte vermittelt wird, sodass für die Gesammtarbeit dW dieser Kräfte jederzeit die Beziehung

$$dW = -d\mathsf{E}$$

erfüllt ist. Zertheilen wir aber die inducirten elektromotorischen Kräfte in der besprochenen Weise, *so erscheint der Austausch der elektrodynamischen Energie* E *allein durch die infolge der Veränderungen des magnetischen Feldes inducirten elektromotorischen Kräfte zu erfolgen*, während die Arbeit der durch Bewegung der Materie im magnetischen Felde inducirten elektromotorischen Kräfte durch gleichzeitige Arbeit die ponderomotorischen Kräfte kompensirt wird.

Nicht minder wichtig als diese Sätze ist für die Entwicklung einer allgemeinen Theorie der Elektrodynamik die an Art. 5 sich

---

1) Vergl. die in Art. 36 citirten Experimente von v. Helmholtz.

schliessende Folgerung, dass für E auch folgende Darstellung gilt:

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, \mathsf{H}^2.$$

Wegen ihrer vielfachen Beziehungen zur magnetischen Kraft, kann diese Energie die *„magnetische Energie"* des Stromsystemes genannt werden. —

Nehmen wir in magnetisirbaren Medien vorgebildete Stromsysteme an, welche sich unter dem Einfluss der magnetischen Kraft H drehen, und sehen von der Hysteresis ab, so ist in erster Annäherung, ähnlich wie in Art. 17, für die Energie der Magnetisirung μ im Volumelement $d\omega$ zu setzen

$$d\omega\, \tfrac{1}{2}\mu \mathsf{H} \cos(\mu, \mathsf{H}),$$

sodass wir für die *gesammte magnetische Energie* des Systemes dann

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, \mathsf{H}^2 + \tfrac{1}{2}\int d\omega\, \mu \mathsf{H} \cos(\mu, \mathsf{H}) = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, H \mathsf{H} \cos(H, \mathsf{H})$$

erhalten. Speciell für isotrope Medien folgt

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\, H\mathsf{H} = \frac{p}{8\pi}\int d\omega\, \mathsf{H}^2.$$

Die eigene Energie der als unveränderlich betrachteten molekularen Stromsysteme ist in diesen Formeln nicht berücksichtigt worden. —

Was nun die Beziehungen des Resultates

$$\alpha^2 = 1$$

zu dem Satze der Erhaltung der Energie anbetrifft, so ist Folgendes zu bemerken.

Aus dem Induktionserscheinungen in unbeweglichen Stromsystemen kann im Anschluss an den vorigen Artikel auf die latente elektrodynamische Energie

$$\mathsf{E} = -\alpha^2 P = \tfrac{1}{2}\alpha^2 \iint \frac{ds\, ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds, ds')$$

geschlossen werden. Bei Bewegungen der Stromleiter wären daher nach der Formel

$$dW = (\alpha^2 - 1)\, dP$$

des vorigen Artikels die Aenderungen der Energie E durch die Arbeit der ponderomotorischen und inducirten elektromotorischen Kräfte im Allgemeinen nicht kompensirt, wenn α^2 nicht $= 1$ sein

sollte. Es müsste daher in diesem Falle der Austausch der elektrodynamischen Energie E noch auf anderen Wegen vorsichgehen — oder der Satz von der Erhaltung der Energie wäre verletzt. Dieser Satz führt demgemäss zu der Folgerung $\alpha^2 = 1$, wenn angenommen wird, dass der Austausch der elektrodynamischen Energie allein durch die ponderomotorischen und die inducirten elektromotorischen Kräfte erfolgt. —

III. Theorie der Elektrodynamik ohne Berücksichtigung der molekularen Konstitution der Materie.

41. Vorwort. Die Aufgabe, ausgehend von dem vorstehend zusammengestellten Beobachtungsmaterial eine umfassende Theorie der Elektrodynamik aufzubauen, ist in zwei verschiedenen Richtungen in Angriff genommen worden. In einem Falle zertheilte man die Elektricität oder ihre Ströme in einzelne selbstständige Elemente und suchte die elektrodynamischen Erscheinungen durch Wirkungen dieser Theile zu erklären. In dieser Hinsicht hat W. Weber epochemachend gewirkt. Auf der anderen Seite wurden die direkten Fernwirkungen durch die Vermittelung von Zwischenmedien ersetzt. Hier wies Maxwell den Weg, indem er von Faraday'schen Vorstellungen ausging. Die neuere Entwicklung der Elektrodynamik scheint zu zeigen, dass die Theorie sich erst durch die Vereinigung beider Wege befriedigend gestalten lässt.

Wir wollen mit der Besprechung der Maxwell'schen Theorie beginnen, also zunächst den zweiten Weg beschreiten.

§ 8. **Maxwell's Theorie der Elektrodynamik**[1]).

42. *Hypothese der inkompressiblen Elektricität; Materie und Aether.* Die Behandlung der ponderomotorischen Kräfte lässt sich bei Maxwell als etwas ziemlich Selbstständiges aus der Theorie herauslösen; wir wollen hieraus für die Darstellung Nutzen ziehen, indem wir die ponderomotorischen Kräfte zunächst ganz bei Seite lassen und später (in Art. 46) gesondert untersuchen. —

Bei der Ausgestaltung der mathematischen Theorie der Electrodynamik ohne Rücksicht auf die ponderomotorischen Kräfte bestand

1) Phil. Mag. 1861—62; Scient. Papers I, p. 451. — Phil. Trans. Roy. Soc. London 1864, vol. 155; Scient. Papers I, p. 526. — Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1873.

Maxwell's Aufgabe im Wesentlichen darin, die Formeln der älteren Theorien, welche mit endlichen Entfernungen rechnen, auf Differentialgleichungen des Raumes zurückzuführen. Dabei stellten sich in zwei Hinsichten grosse Schwierigkeiten entgegen: Erstens mussten auch im scheinbar leeren Raum elektrodynamische Vorgänge angenommen werden, worüber die gewöhnliche experimentelle Erfahrung nichts aussagt, und zweitens musste mit elektrischen Strömen gerechnet werden, die im gewöhnlichen Sinne des Wortes *ungeschlossen* sind, über deren elektrodynamisches Verhalten wir also nur sehr unvollkommen Aufschluss besitzen. — Es ist wohl möglich, dass Maxwell sich bei seinen Forschungen nach den elektrodynamischen Vorgängen im scheinbar leeren Raum von vorne herein durch die Hoffnung hat leiten lassen, sie in dem Wechselspiel der Lichtschwingungen zu finden, denn die merkwürdige Beziehung zwischen dem Verhältniss der elektrostatischen zur elektrodynamischen Stromeinheit und der Lichtgeschwindigkeit, die durch Messungen von W. Weber und R. Kohlrausch enthüllt worden war, gab dazu gerade bei seinem Standpunkt einen mächtigen Anreiz, — aber es wäre müssig, sich darüber Vermuthungen hinzugeben. Jedenfalls gelang es ihm, beide Schwierigkeiten mit einem einzigen Schlage durch die folgende Hypothese zu beseitigen, welche der Untersuchung auch im scheinbar leeren Raum ebendieselben elektrodynamischen Vorgänge anweist, wie in der sinnlich wahrnehmbaren Materie, und welche alle Ströme zu geschlossenen macht.

Maxwell's Hypothese der inkompressiblen Elektricität: Die elektrodynamischen Erscheinungen verlaufen so, als ob die Welt nicht nur da, wo unsere Sinne Materie bemerken, sondern überall, und zwar ohne in Betracht kommende Lücken, mit Substanz erfüllt wäre, und als ob in dieser Substanz eine überall gleichbeschaffene, inkompressible Flüssigkeit vertheilt wäre, die sich in einer von der Beschaffenheit der Substanz abhängigen Weise verschieben kann und hierdurch zu den elektrodynamischen Erscheinungen Anlass giebt. —

Die inkompressible Flüssigkeit nennt Maxwell „*Elektricität*", weil ihre Bewegung in Leitern den elektrischen Strom der gewöhnlichen Vorstellung genau ersetzt. Die Ausdrücke „positive und negative Elektricität", „freie und wahre Elektricität", beziehen sich dann freilich nur indirekt und in einem veränderten Sinne auf die neu definirte Elektricität. —

Ob wir die Substanz, in welcher die Elektricität zu denken ist, überall „*Materie*" nennen, oder ob wir zwischen „*sinnlich wahr-*

nehmbarer Materie" oder „*Materie*" kurzweg und „*freiem Aether*" oder „*Aether*" kurzweg unterscheiden, ist für die Maxwell'sche Theorie ganz gleichgültig. Wenn im Folgenden die zwiefältige Bezeichnung benutzt wird, so geschieht es im Interesse der Darstellung. In der That ist es angesichts der Erfahrung, dass alle die mannigfachen Unterschiede in dem elektrodynamischen Verhalten eines räumlichen Gebietes in dem Maasse, in welchem die Materie entfernt wird, mehr und mehr verschwinden, um ganz bestimmten äusserst einfachen Gesetzen Platz zu machen, sehr erwünscht, für das Medium, welches dann noch übrig bleibt und die individuellen Unterschiede der sinnlich wahrnehmbaren Materie nicht mehr zeigt, einen besonderen Namen zur Verfügung zu haben. —

43. *Bewegung der Maxwell'schen Elektricität.* Zunächst muss festgestellt werden, was eigentlich unter Maxwell's Elektricität und ihren Bewegungen zu verstehen ist.

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass Maxwell die gebräuchlichen Vorstellungen über den elektrischen Leitungsstrom unmittelbar übernahm. So ist denn für isotrope leitende Medien, auf welche wir uns hier beschränken können, bei stationärer Strömung zu setzen:

$$\mathfrak{K} \cong c\mathsf{K},$$

wenn $\mathfrak{K}$ die Leitungsströmung, K die antreibende elektrische Kraft, c die Leitfähigkeit bedeutet. Wir erkennen, *dass Maxwell seiner Elektricität keine Trägheit im gewöhnlichen Sinne des Wortes zuschreibt.*

In dielektrischen Medien haben wir schon früher im Anschluss an die alte Vorstellung zweier Elektricitäten verschiebbare Elektricität angenommen. Aehnlich ist es zwar bei Maxwell, aber doch kommen wir hier zu dem entscheidenden Unterschied gegen früher. — Auch Maxwell setzt die Verschiebung $\mathfrak{D}$ seiner Elektricität linear abhängig mit K, wie wir es früher mit ε thaten, schreibt also für isotrope Medien

$$\mathfrak{D} \cong k'\mathsf{K}.$$

$\mathfrak{D}$ muss nun aber eine solche Bedeutung erhalten, dass die Bedingung der Inkompressibilität überall bewahrt wird, und stellt darum etwas ganz anderes dar wie ε. Um zu zeigen, wie $\mathfrak{D}$ zu definiren ist, benutzt Maxwell den Fall eines kugelförmigen Konduktors, den man elektrisirt. Geschieht die Ladung etwa durch einen dünnen Draht, und wird die Elektricitätsmenge e zugeführt, so muss durch jede koncentrische Kugelfläche die gleiche

Menge nach aussen treten, also, wenn von der Störung in der Nähe des Drahtes abgesehen wird, durch jedes Flächenelement die Menge $d\sigma\mathfrak{D} = e\,d\sigma/4\pi r^2$. Befindet sich die Kugel im freien Aether, so ist $\mathsf{K} = e/r^2$ zu setzen; so folgt denn für den *freien Aether:*

$$\mathfrak{D} \cong \frac{1}{4\pi}\mathsf{K}.$$

Für isotrope *materielle Dielektrika* ergiebt sich entsprechend

$$\mathfrak{D} \cong \frac{k}{4\pi}\mathsf{K},$$

wobei k die Dielektricitätskonstante bedeutet. Maxwell nennt $\mathfrak{D}$ die *dielektrische Verschiebung*. Der Zusammenhang mit dem früher von uns dielektrische Verschiebung genannten Vektor ε wird nach Art. 16 durch die Formel

$$\mathfrak{D} \cong \frac{1}{4\pi}\mathsf{K}+\varepsilon$$

angegeben, die auch für anisotrope Medien gilt; wie dort schon bemerkt, werden wir $\mathfrak{D}$ als die *„Maxwell'sche dielektrische Verschiebung"* bezeichnen.

Der gesammte elektrische Strom setzt sich nach Maxwell im allgemeinen Falle aus einem Leitungsstrom und einem Verschiebungsstrom zusammen; *bezeichnen wir die totale elektrische Strömung mit $\gamma^{(t)}$, so ist demgemäss für isotrope Medien zu setzen:*

$$\text{(I)} \qquad \gamma^{(t)} = \frac{k}{4\pi}\frac{d^e\mathsf{K}}{dt}+c\mathsf{K}.$$

Die Buchstabenbezeichnung der Gleichung entspricht der Maxwell'schen Darstellung.

44. *Feldgleichungen der Elektrodynamik nach Maxwell.* Mit Aufstellung der vorstehenden Gleichung ist der entscheidende Schritt zur Maxwell'schen Theorie gethan; *denn von den ponderomotorischen Kräften abgesehen, ergiebt sich Alles, ohne dass es nöthig wäre, noch irgend etwas Neues hinzuzuthun*; es ist nur nöthig die Erfahrungssätze für stationäre und halbstationäre Zustände und geschlossene Ströme in ihrer differentialen Form, wie sie im zweiten Theile dieser Arbeit mitgetheilt wurden, ohne Veränderung in die Theorie hinüberzunehmen. Wir können uns demgemäss hier mit einer einfachen Zusammenstellung begnügen.

An die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \gamma^{(t)} \cong \frac{k}{4\pi}\frac{d^e\mathsf{K}}{dt}+c\mathsf{K}$$

knüpft sich zunächst nach Art. 23 eine Bestimmungsgleichung der magnetischen Kraft H:

$$\text{(E)} \qquad 4\pi \frac{\gamma^{(\omega)}}{V} \cong -\operatorname{Quirl} \mathsf{H}.$$

H und die Magnetisirung μ ergeben die magnetische Induktion H (Art. 30):

$$\text{(D)} \qquad H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu.$$

Speciell für isotrope, nicht selbstständig magnetisirte Medien ohne Hysteresis ist

$$\text{(L)} \qquad H \cong p\mathsf{H}.$$

H seinerseits erfüllt die Bedingung

$$\operatorname{Div} H = 0$$

und giebt so eine zweite Bestimmungsgleichung für H.

Das physikalische Verhältniss von H und H haben wir uns nach Maxwell ähnlich zu denken, wie das zwischen K und $\mathfrak{D}$.

Für die elektrische Kraft K gab die Erfahrung einen Antheil, welcher auf Rechnung der Bewegung der Materie im magnetischen Felde gesetzt werden konnte, einen zweiten, der als Folge von Veränderungen des magnetischen Feldes erschien, und endlich einen dritten, der zu einem skalaren Potential gehörte, und mit der freien Elektricität in Verbindung gebracht wurde. Dem entsprechend müssen wir nach Maxwell setzen:

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathsf{K}_x &= \frac{v_z}{V} H_y - \frac{v_y}{V} H_z - \frac{d\mathfrak{A}_x}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \mathsf{K}_y &= \frac{v_x}{V} H_z - \frac{v_z}{V} H_x - \frac{d\mathfrak{A}_y}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \mathsf{K}_z &= \frac{v_y}{V} H_x - \frac{v_x}{V} H_y - \frac{d\mathfrak{A}_z}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Die beiden ersten Glieder rechts stellen den Antheil wegen der Bewegung der Materie genau dem Art. 37 entsprechend dar. Die dritten Glieder sollen den Antheil wegen der Veränderung des Magnetfeldes ergeben. Für diesen fanden wir in Art. 37 einen Werth kongruent

$$-\frac{1}{V}\frac{d^{*}\Gamma}{dt} + \mathsf{K}^{*},$$

wobei Γ das Vektorpotential und K^{*} einen unbekannten Vektor bedeutet, dessen Quirl verschwindet. Wir erkennen, dass

$$\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dt} = \frac{1}{V}\frac{d\Gamma_\nu}{dt} - \mathsf{K}_\nu^*$$

gesetzt worden ist. Den Vektor $\mathfrak{A}$ nennt Maxwell *„elektromagnetisches Moment“*. Als eine Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{A}$ ergiebt sich nach der eben hingeschriebenen Gleichung und Art. 23

$$\text{(A)} \qquad \text{Quirl}\,\mathfrak{A} = -\frac{1}{V}H.$$

Ebenso wie K^* bleibt auch die Divergenz von $\mathfrak{A}$, somit dieser Vektor selbst bis zu einem gewissen Grade ungewiss. —

Die letzten Glieder in (B) stellen den von der Bewegung der Materie und den Veränderungen des Feldes unabhängigen Theil der elektrischen Kraft dar. Wie wir sehen, wird für diesen der Quirl $= 0$ gesetzt. Dies ist nöthig, damit die erfahrungsmässigen Gesetze der Elektrostatik sich ergeben. —

Die Formeln (A) und (B) führen uns wieder zu dem Ausgang, zur elektrischen Kraft, zurück und schließen so den Ring der Formeln.

45. *Wahre und freie Elektricität; Satz von der Erhaltung der Elektricität.* Wahre und freie Elektricität im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind nach Maxwell bedingt durch dielektrische Spannungszustände seiner elektrischen Flüssigkeit. An der Oberfläche eines geladenen Leiters haben wir nach Art. 16: $4\pi\eta^{(w)} = \mathsf{K}_\nu + 4\pi\varepsilon_\nu = k\mathsf{K}_\nu = 4\pi\mathfrak{D}_\nu$,

$$\eta^{(w)} = \frac{k}{4\pi}\mathsf{K}_\nu = \mathfrak{D}_\nu,$$

wenn ν die vom Leiter fortweisende Normale bedeutet; $\mathfrak{D}_\nu$ *ist also hier als die Dichte der wahren Elektricität zu bezeichnen.* Entsprechend erhalten wir an der *Trennungsfläche zweier Dielektrika* die Definitionsgleichung

$$\text{(K)} \qquad \eta^{(w)} = \left(\frac{k}{4\pi}\mathsf{K}_\nu\right)_1 + \left(\frac{k}{4\pi}\mathsf{K}_\nu\right)_2 = (\mathfrak{D}_\nu)_1 + (\mathfrak{D}_\nu)_2,$$

und im *Innern eines Leiters, bezüglich Dielektrikums:*

$$\text{(J)} \qquad \chi^{(w)} = \frac{1}{4\pi}\text{Div}(k\mathsf{K}) = \text{Div}\,\mathfrak{D}. \text{ —}$$

Maxwell's Hypothese der inkompressiblen Elektricität verlangt $\text{Div}\,\gamma^{(t)} = 0$ und ergiebt unter Anwendung der Gleichung (I):

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\text{Div}(k\mathsf{K}) + c\,\text{Div}\,\mathsf{K} = 0,$$

d. h.:

$$\frac{d}{dt}\chi^{(w)} + c \operatorname{Div} \mathsf{K} = 0.$$

Hiermit wird der *Satz von der Erhaltung der Elektricität* ausgesprochen. *Maxwells Hypothese der inkompressiblen Elektricität kann hiernach als eine eigenartige Formulirung dieses Satzes aufgefasst werden.*

Sehr interessant ist es, die Stelle zu beachten, an welcher die Hypothese in die Theorie eingeführt wird. Es geschieht das durch die Annahme der Gleichung (E):

$$4\pi \frac{\gamma^{(t)}}{V} \cong -\operatorname{Quirl} \mathsf{H},$$

denn diese setzt voraus, dass $\operatorname{Div} \gamma^{(t)}$ verschwindet. Einmal aufgestellt bewirkt sie andererseits, dass die Geichung

$$\operatorname{Div} \gamma^{(t)} = 0$$

und damit der Satz von der Erhaltung der Elektricität beständig erfüllt wird.

Bemerkt muss hier noch werden, dass Maxwell unsere wahre Elektricität als „freie" bezeichnet. (K) und (J) geben also in seiner Ausdrucksweise die Flächendichte und die räumliche Dichte der *freien Elektricität* an. — Von dem, was wir *„freie Elektricität"* nennen, spricht er bei der Darstellung der allgemeinen Theorie überhaupt nicht; wir müssen sie einfach als Hülfsgrössen ansehen, die sich an das Flächenintegral von K anschliessen. —

46. *Ponderomotorische Kräfte.* Gedanken von Faraday verwerthend nimmt Maxwell zur Erklärung der elektrischen und magnetischen ponderomotorischen Kräfte Drucke von solcher Art an, wie sie in der Elasticitätstheorie benutzt werden. Das gilt auch für den freien Aether; *dieser wird dabei wie eine Flüssigkeit behandelt, welche den Drucken ohne Widerstand folgt.*

Maxwell weist nach, dass *die mit der Elektrisirung verknüpften ponderomotorischen Kräfte,* für welche wir in Art. 19 die Formel

$$F \cong e^{(w)} \mathsf{K}$$

fanden, sich durch die Annahme erklären, dass längs den elektrischen Kraftlinien eine Zugspannung von der Intensität

$$S = \frac{k}{8\pi} \mathsf{K}^2$$

und senkrecht zu den Kraftlinien eine gleich grosse Druckspannung besteht.

Ganz entsprechend ergeben sich die *ponderomotorischen Kräfte, welche sich an die magnetische Kraft knüpfen*, durch die Annahme einer Zugspannung von der Intensität

$$S = \frac{p}{8\pi} \mathsf{H}^2$$

parallel und einer gleich grossen Druckspannung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. — Für die an einem Stromelement angreifende mechanische Kraft F folgt dann insbesondere

$$\text{(C)} \quad \begin{gathered} F_x = d\omega\left(\frac{\gamma_z}{V} H_y - \frac{\gamma_y}{V} H_z\right), \qquad F_y = d\omega\left(\frac{\gamma_x}{V} H_z - \frac{\gamma_z}{V} H_x\right), \\ F_z = d\omega\left(\frac{\gamma_y}{V} H_x - \frac{\gamma_x}{V} H_y\right), \end{gathered}$$

was mit unserem Erfahrungssatze in Art. 21 in Uebereinstimmung ist. — Es wurde hier der einfachste Fall vorausgesetzt, in welchem $H \cong p\mathsf{H}$ gesetzt werden darf. Besteht diese Beziehung nicht, so wird die Druckvertheilung komplicirter. (Vergl. Maxwell, Treatise etc., Art. 642.) —

47. *Energie des elektrodynamischen Feldes. Poynting'scher Satz.* Die Art. 17 und 40 lehren uns unmittelbar, wo wir den Sitz der elektrodynamischen Energie zu suchen haben, wenn wir uns Maxwell's Vorstellungen zu eigen machen: *Es ist für jedes Volumelement dω die Energie*

$$d\mathsf{E} = d\omega\left(\frac{k}{8\pi} \mathsf{K}^2 + \frac{p}{8\pi} \mathsf{H}^2\right)$$

anzunehmen.

Ausgehend von dieser Formel hat Poynting[1]) gezeigt, dass sich ein sehr einfacher Satz angeben lässt, welcher die Veränderungen der Feldenergie beherrscht. Dieser nach *Poynting benannte Satz* lautet:

Die Energie strömt im elektrodynamischen Felde wie eine Flüssigkeit mit der Intensität

$$\mathsf{S} = \frac{V}{4\pi} \mathsf{K}\mathsf{H} \sin(\mathsf{K}, \mathsf{H})$$

senkrecht zu K und H in derjenigen Richtung, welche aus der zu H normalen K-Komponente durch Drehung um $\pi/2$ im Sinne von H hervorgeht. — *Unter* K *ist hierbei nur derjenige Theil zu verstehen, welcher nicht von der Bewegung der Materie im magnetischen Felde*

1) Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1884, vol. 175. II, p. 343.

herrührt; werden also die Gleichungen (B) Art. 44 benutzt, so sind rechts die beiden ersten Glieder bei Seite zu lassen. Diese Bemerkung wird für uns später von Bedeutung sein. —

48. *Anwendung der allgemeinen Mechanik.* In sehr wichtigen Ausführungen hat Maxwell die Gesetze der allgemeinen Mechanik auf seine Theorie der Elektrodynamik angewandt. *Er sieht dabei in der elektrischen Feldenergie die potentielle Energie des Systemes und in der magnetischen Energie seine kinetische Energie.*

Es genügt für uns, Maxwell's Ueberlegungen für zwei einfache Stromringe wiederzugeben. Wir berücksichtigen dabei nach seinem Vorgange nur die kinetische, also die magnetische Energie und setzen sehr langsame Veränderungen voraus.

Dann darf in beiden Kreisen die Stromstärke überall als gleich gelten; sie sei i_1 bez. i_2. Diese Grössen haben wir als „Geschwindigkeiten" im Sinne der allgemeinen Mechanik aufzufassen. Sind e_1 und e_2 die zugehörigen allgemeinen Koordinaten, so wird

$$i_1 = \frac{de_1}{dt}, \qquad i_2 = \frac{de_2}{dt},$$

e_1 und e_2 bedeuten also nichts anderes als die Elektricitätsmengen, welche seit dem für t geltenden Anfangspunkt durch irgend einen Querschnitt hindurchgingen.

Bei der Feststellung der kinetischen Energie T berücksichtigen wir entsprechend der Annahme langsamer Aenderungen nur diejenigen (uns verborgenen) Bewegungen, welche durch i_1 und i_2 bewirkt werden, und setzen ihre Geschwindigkeiten in lineare Abhängigkeit von i_1 und i_2. Dann wird

$$T = \tfrac{1}{2} i_1 i_1 L + i_1 i_2 M + \tfrac{1}{2} i_2 i_2 N,$$

wobei L, M, N Funktionen sind, welche durch Gestalt und Lage der Stromkreise bestimmt werden, e_1 und e_2 aber nicht enthalten.

Nach den allgemeinen Bewegungsgleichungen von Lagrange ist in unserem Falle, wo nur die kinetische Energie in Betracht kommt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -Q,$$

wenn q irgend eine der Koordinaten bezeichnet, welche den Zustand des Systemes bestimmen, ferner $q' = dq/dt$ die zugehörige Geschwindigkeit und Q die zugehörige nach aussen wirkende Kraft, die letztere in solcher Definition, dass $Q\,dq = Q\,q'\,dt$ die abgegebene Energie bedeutet.

Setzen wir zunächst $q = e_1$, so wird Q zu der im ersten

Stromkreis wirkenden elektromotorischen Kraft E_1 elektrodynamischen Ursprungs, d. h. zur inducirten elektromotorischen Kraft, denn $E_1 de_1 = E_1 i_1 dt$ stellt die abgegebene elektrodynamische Energie dar. Es ergiebt sich so die Formel:

$$E_1 = -\frac{d}{dt}\left(i_1 L + \dot{i}_2 M\right),$$

aus der hervorgeht, dass $-i_1^2 L/2$ das Neumann'sche elektrodynamische Potential des ersten Stromkreises auf sich selbst und $-i_1 i_2 M$ das wechselseitige Potential beider Stromkreise bedeutet; $-i_2^2 N/2$ ist entsprechend das Selbstpotential des zweiten Stromkreises und $-T$ das Selbstpotential des ganzen Systemes. *Mit Rücksicht hierauf umfasst unsere Formel für E_1 die sämmtlichen Gesetze der Induktion in geschlossenen Bahnen.*

Versteht man zweitens unter q irgend eine der Koordinaten, welche Gestalt und Lage der Ströme feststellen, so wird Q zur zugehörigen ponderomotorischen Kraft im allgemeinen Sinne der Mechanik. Wir erhalten, da q' dann in T fehlt:

$$dW = Qdq = \tfrac{1}{2} i_1^2 dL + i_1 i_2 dM + \tfrac{1}{2} i_2^2 dN,$$

dies ist aber nichts anderes als das Neumann'sche Gesetz über die elektrodynamische ponderomotorische Arbeit.

Wenn man also mit Maxwell als kinetische Energie eines Stromsystemes das mit umgekehrten Vorzeichen versehene Neumann'sche Potential eines Stromsystemes auf sich selbst, bezüglich den Ausdruck $\int d\omega\, \mathsf{H}^2/8\pi$ annimmt, so ergiebt sich sowohl für die inducirten elektromotorischen Kräfte, als auch für die ponderomotorischen Kräfte eine vollständige und richtige Darstellung.

Die Energie $d\omega\, \mathsf{H}/8\pi$ ist nach Maxwell im Volumelement $d\omega$ selbst zu suchen, die Bewegungen, welche die kinetische Energie eines Stromsystemes enthalten, bestehen also nicht in den Strömungen selbst, sondern gehen dort vor sich, wo die magnetische Kraft auftritt.

49. *Elektromagnetische Lichttheorie.* Wir haben nun noch die schönste Perle unter den grossartigen Erfolgen der Maxwell'schen Theorie, die elektrodynamische Lichttheorie in Kürze zu besprechen.

Als Vektor zur Beschreibung der Lichterscheinungen benutzt Maxwell das elektrokinetische Moment $\mathfrak{A}$. Wir beschränken uns hier auf den Fall eines *homogenen isotropen Mediums und nehmen wie Maxwell an, dass es ruhe.* Dann ist nach Gleichung (B)

$$\mathsf{K}_\nu = -\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu},$$

wenn unter ν eine der Koordinatenrichtungen x, y, z verstanden wird. K seinerseits bestimmt nach (I) den totalen elektrischen Strom:

$$4\pi\gamma_\nu^{(i)} = k\frac{d\mathsf{K}_\nu}{dt} + c\mathsf{K}_\nu.$$

Durch Elimination von K_ν folgt:

$$-4\pi\gamma_\nu^{(i)} = k\frac{d^2\mathfrak{A}_\nu}{dt^2} + c\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dt} + k\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + c\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}.$$

$\gamma^{(i)}$ ergiebt nach (E) den Quirl von H und, wenn wir $\mathsf{H} = H/p$ setzen, auch den von H:

$$-4\pi p\frac{\gamma^{(i)}}{V} \cong \text{Quirl}\, H;$$

andererseits ist nach (A): $H \cong -V\,\text{Quirl}\,\mathfrak{A}$; nach einem in Art. 4 angegebenen Satze über den Quirl des Quirls folgt hieraus:

$$-4\pi p\gamma_\nu^{(i)} = -V^2\frac{\partial}{\partial\nu}\text{Div}\,\mathfrak{A} + V^2\Delta\mathfrak{A}_\nu.$$

Diese Gleichung mit der früheren für $4\pi\gamma_\nu^{(i)}$ vereinigt ergiebt

$$pk\frac{d^2\mathfrak{A}_\nu}{dt^2} + pc\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dt} = V^2\Delta\mathfrak{A}_\nu - V^2\frac{\partial}{\partial\nu}\text{Div}\,\mathfrak{A} - pk\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - pc\frac{\partial\varphi}{\partial\nu},$$

und damit die Maxwell'schen Feldgleichungen für die Lichtbewegung, wenn ν nacheinander $= x, y, z$ gesetzt wird. *Als Bestimmungsgleichungen für* K *und* H *gehören hierzu:*

$$\mathsf{K}_\nu = -\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \quad \mathsf{H} \cong -\frac{V}{p}\text{Quirl}\,\mathfrak{A}. —$$

Differentiirt man die Feldgleichungen bezüglich nach x, y, z und addirt, so folgt in

$$k\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\text{Div}\,\mathfrak{A} + \Delta\varphi\right) + 4\pi c\left(\frac{d}{dt}\text{Div}\,\mathfrak{A} + \Delta\varphi\right) = 0$$

eine Gleichung, welche die *Inkompressibilitätsbedingung* der Maxwell'schen Elektricität darstellt; in der That sagt sie nach der früheren Formel für $4\pi\gamma_\nu^{(i)}$ aus, dass $\text{Div}\,\gamma^{(i)}$ verschwindet. Die Klammern enthalten $-\text{Div}\,\mathsf{K}$, sodass wir die in Art. 45 aufgestellte Gleichung

$$\frac{d}{dt}\text{Div}\,k\mathsf{K} + 4\pi c\,\text{Div}\,\mathsf{K} = 0$$

vor uns haben. Für H folgt aus der hingeschriebenen Vektorgleichung sofort:

$$\text{Div}\,\mathsf{H} = 0.$$

In dieser und der vorigen Bedingung ruht das *Gesetz der Transversalität der Lichtschwingungen.* —

Die galvanische Leitung — entsprechend einem von 0 verschiedenen Werth von c — bedingt eine *Absorption.* Für einen *vollkommen durchsichtigen Körper*, also für den Fall $c = 0$, ergiebt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{Div}\,\mathfrak{A}+\Delta\varphi\right) = -\frac{d}{dt}\mathrm{Div}\,\mathsf{K} = 0.$$

Betrachten wir mit Maxwell φ als das Potential der freien Elektricität, so wird $\Delta\varphi = -4\pi\chi^{(w)}/k =$ const, und $\mathrm{Div}\,\mathfrak{A}$ sowie $\mathrm{Div}\,\mathsf{K}$ linear abhängig von t; für die *schwingenden Theile* der elektrodynamischen Vektoren kommen hiernach sowohl $\Delta\varphi$ wie $\mathrm{Div}\,\mathfrak{A}$ ausser Betracht und können $= 0$ gesetzt werden. So erhalten wir

$$pk\frac{d^2\mathfrak{A}_v}{dt^2} = V^2\mathfrak{A}_v.$$

Werden hierzu noch die Gleichungen

$$\mathsf{K}_v = -\frac{d\mathfrak{A}_v}{dt}; \qquad \mathsf{H} \cong -\frac{V}{p}\mathrm{Quirl}\,\mathfrak{A}$$

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{K} = 0; \qquad \mathrm{Div}\,\mathsf{H} = 0$$

hinzugenommen, so haben wir das vollständige System der Maxwell'schen Gleichungen für die Lichtschwingungen in einem nichtleitenden, elektricitätsfreien, isotropen Medium vor uns.

Die Lichtgeschwindigkeit ergiebt sich zu

$$V^{(p,k)} = \frac{V}{\sqrt{pk}}.$$

Im freien Aether haben Dielektricitätskonstante k und magnetische Permeabilität p den Werth 1; die *Lichtgeschwindigkeit im freien Aether wird also* $= V$, *d. h. gleich dem Quotienten von elektromagnetischer und elektrostatischer Stromeinheit.* Mit diesem Satze sind wir zu der Krönung des Maxwell'schen Werkes gelangt: *Die zunächst zufällig scheinende Uebereinstimmung der Zahlen wird zu einem schönen Beleg für die Berechtigung der Theorie.*

50. *Physikalische Bedeutung der Maxwell'schen Elektricität.* Sobald man die Maxwell'sche Hypothese der überall vorhandenen inkompressiblen Elektricität handgreiflich auszugestalten versucht, geräth man in sehr grosse Schwierigkeiten. Man denke sich — um ein Beispiel herauszugreifen — eine elektrisch geladene Kugel in einem homogenen Dielektrikum. Es müsste dann

in der Kugel mehr oder weniger der inkompressiblen Elektricität vorhanden sein als im neutralen Zustand und der Ueberschuss die Elektricität im Dielektrikum entsprechend nach aussen oder nach innen drängen. Warum, so müssen wir fragen, kann die Spannung im Dielektrikum, und damit die Elektrisirung der Kugel nicht auch dadurch beseitigt werden, dass die sinnlich wahrnehmbare Materie in Kugel und Dielektrikum ein wenig nach aussen rückt? — Sehr treffend weist ferner Lodge in seinen *Modern Views of Electricity*[1]) auf die Schwierigkeit hin, welche unsere Vorstellung findet, wenn wir uns die Maxwell'sche Elektricität in den festen Metallen beweglich, in den gasförmigen Dielektrika durch Kräfte festgehalten denken sollen, gerade umgekehrt, wie die Konstitution zunächst vermuthen liesse. —

Selbst dieser begeisterte Interpret Maxwell's sieht sich genöthigt, unserer Auffassung durch Bilder zur Hülfe zu kommen, welche sich von dem ursprünglichen gar weit entfernen. Am einfachsten scheinen ihm folgende Annahmen: Ausser der sinnlich wahrnehmbaren Materie giebt es einen „Aether", der die ganze Welt, auch die Materie erfüllt, und überall frei beweglich ist. Er besteht aus zwei Komponenten entgegengesetzter Art, der „positiven und der negativen Elektricität", die einander überall durchdringen und gegeneinander verschiebbar sind. In *„freien"* Aether entstehen dabei Kräfte, welche die einzelnen Theilchen entgegengesetzter Art wieder in die ursprüngliche relative Lage zu bringen streben. Der Einfluss der materiellen Dielektrika besteht darin, die Intensität dieser Kräfte zu ändern, der Einfluss der Leiter darin, die Kräfte ganz aufzuheben, also den Verband der beiden Elektricitäten zu zerstören. — Das ist gewiss geistreich erdacht und für die Unterstützung des Verständnisses der Theorie von grossem Werth, — aber wir fühlen doch, dass Alles recht wohl auch ganz anders sein könnte. —

Wollen wir unseren freien Standpunkt der Forschung wahren, so dürfen wir offenbar in der Maxwell'schen inkompressiblen Elektricität durchaus nichts anderes sehen, als einen Kunstgriff bei der Entwicklung der mathematischen Theorie. Er macht es leicht, der Rechnung zu folgen — und *darin* liegt seine Bedeutung. — Diese gering zu schätzen, wäre sehr verkehrt, denn die imponderablen elektrischen Flüssigkeiten der alten Auffassung bieten ja auch nichts anderes als einen solchen Kunstgriff.

---

1) **London and New York, 1889; deutsch herausgeg. v. Wachsmuth, Leipzig 1896.**

Wenn wir uns der Sache so gegenüberstellen, handeln wir sicher im Sinne Maxwell's, denn seine Versuche, mechanische Modelle zu konstruiren, welche die charakterischen Eigenschaften des elektrodynamischen Feldes zeigen, lassen deutlich erkennen, dass er nicht eine buchstäbliche Uebertragung seines Bildes in die Wirklichkeit im Sinne hatte.

51. *Leistungen und Grenzen der Maxwell'schen Theorie.* Als eigentlicher Kern der Maxwell'schen Theorie bleibt nach dieser Ueberlegung das System seiner elektrodynamischen Formeln, die Erkenntniss, dass wir für die Elektrodynamik die unvermittelten Fernwirkungen vermeiden können, die Vereinigung von Optik und Elektrodynamik und das Bewusstsein, dass eine Deutung des ganzen Gebietes der elektrodynamischen und optischen Erscheinungen auf Grund der allgemeinen Mechanik möglich sein wird, wie sie ausgehend von materiellen Systemen abgeleitet wurde. —

Die Einfachheit des Formelsystems verglichen mit der Mannigfaltigkeit der beherrschten Erscheinungen geben der Maxwell'schen Theorie einen Anblick von imponirender Grossartigkeit; und gerade der Reiz des Geheimnissvollen, welcher sie vermöge ihrer Ableitung umgiebt, erhöht den Eindruck noch weiter. L. Boltzmann schildert ihn vortrefflich, indem er ausruft[1]):

„War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,
Die mit geheimnissvoll verborg'nem Trieb
Die Kräfte der Natur um mich enthüllen
Und mir das Herz mit stiller Freude füllen". —

Wenn wir uns nun aber dieser Freude unbefangen hingeben, so darf darüber nicht vergessen werden, *dass die Einfachheit sich zum grossen Theil ergiebt, weil die in Wirklichkeit äusserst komplicirten elektrodynamischen Vorgänge nach einer einzelnen Richtung hin summarisch behandelt werden.* Erblickt doch die Maxwell'sche Theorie im galvanischen Strom die gleichförmige Bewegung einer gewissen imponderablen Flüssigkeit nach einer bestimmten Richtung hin, während wir recht wohl wissen, dass dabei in Elektrolyten positiv und negativ geladene materielle Theilchen nach verschiedenen Richtungen wandern. Wird doch in dielektrischen Medien der jeweilige Zustand durch einen einzigen Vektor $\mathfrak{D}$ gemessen, während uns das optische Verhalten beweist, dass dabei molekulare Vorgänge verschiedener und sehr komplicirter Art nebeneinander statt-

1) Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie, etc. II. Theil. Leipzig 1893, Vorwort.

finden. — So nimmt es denn nicht Wunder und scheint kein Vorwurf gegen die Theorie, dass ihre Gesetze für die dielektrische Polarisation, für die Magnetisirung, für die Lichtdispersion und Absorption, für die Lichtbewegung in bewegten Medien im Einzelnen der Erfahrung durchaus nicht, oft nicht einmal qualitativ entsprechen. *Die Theorie, wie sie uns zunächst geboten wird, ist eben nur eine Formulirung der Grundprincipien in der denkbar einfachsten Form; Ausführungen im Einzelnen überlässt sie der weiteren Forschung.*

52. *Arbeiten im Anschluss an Maxwell.* Eine weitere Ausgestaltung der Grundlagen der Elektrodynamik ist im Anschluss an Maxwell in verschiedener Richtung versucht worden.

H. v. Helmholtz stellte sich die Aufgabe, die Fernwirkungstheorie so zu vervollständigen, dass sie in gleicher Weise eine Erklärung des Lichtes als elektrodynamische Erscheinung zu bieten vermag. Für die Würdigung des Gedankens der Nahewirkung wird es nützlich sein, wenn wir im Folgenden diesem höchst interessanten Versuch, die direkten Fernwirkungen zu retten, einen kurzen Rückblick widmen, obgleich wir dabei unseren Weg ein wenig verlassen müssen.

O. Heaviside und H. Hertz vereinfachten in glücklicher Weise das Formelsystem Maxwell's, indem sie ausschalteten, was einst den Weg zeigte, aber am Ziele nicht mehr nothwendig scheint. Im Anschluss hieran versuchte Hertz die Theorie für bewegte Medien systematischer zu gestalten. — Ueber die physikalische Bedeutung der Grössen in den Gleichungen gab E. Cohn interessante Aufschlüsse.

J. H. Poynting und J. J. Thomson führten den Faraday'schen Gedanken der beweglichen Kraftlinien weiter aus.

H. v. Helmholtz, H. A. Lorentz, L. Boltzmann, H. Ebert u. a. zeigten, wie die allgemeine Mechanik sich weitergehend auf die Elektrodynamik anwenden lässt. Ich muss es mir versagen, auf diese hochbedeutsamen Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit näher einzugehen.

Für die Eigenschaften elektrodynamischer Systeme wurden eine grosse Zahl von mechanischen Modellen konstruirt (z. B. von Fitzgerald, Lodge, Boltzmann, Ebert, Sommerfeld, Larmor), und von ihnen zum Theil weitgehende Anwendungen gemacht (vor allem durch Larmor). Auch ihre Besprechung muss hier unterbleiben.

Endlich wurde eine weitere Ausführung der Maxwell'schen Theorie unter Rücksicht auf die molekulare Konstitution der Ma-

terie versucht. Darüber wird im letzten Theile dieser Arbeit zu berichten sein.

§ 9. Theorie der Elektrodynamik von v. Helmholtz.

53. *Prinzipien.* Indem v. Helmholtz in den Arbeiten, von welchen jetzt die Rede sein soll, zu den alten Vorstellungen der direkten Fernwirkungen zurückkehrt, folgt er doch unter dem Zwange der Thatsachen Maxwell insofern, als er auch im freien Aether *dielectrische Polarisation* annimmt. Diese bedeutet dabei eine Verschiebung hypothetischer elektrischer Theilchen in der alten Vorstellungsweise.

Da v. Helmholtz mit der Möglichkeit ungeschlossener Ströme rechnet, kann er nicht wie Maxwell ohne Weiteres die die für geschlossene Stromsysteme gefundenen Erfahrungssätze in die Theorie hinübernehmen. Als Ersatz für den verloren gegangenen Leitfaden wird das Neumann'sche elektrodynamische Potential in einer besonderen Weise benutzt, die sich durchaus von derjenigen unterscheidet, welche wir durch F. Neumann selbst kennen lernten. Während nämlich F. Neumann im engsten Anschluss an die Erfahrung sein Integral bei den Anwendungen stets über *geschlossene* Kurven ausdehnt, und solche Fälle ausser Betracht lässt, in denen dieses nicht möglich ist, nimmt v. Helmholtz über die Erfahrung hinausgehend an, *dass das F. Neumann'sche Potential ganz allgemein und selbst für die Wechselwirkung je zweier Stromelemente in derselben direkten Weise anzuwenden sei, wie nach F. Neumann für die Wechselwirkung zweier geschlossener Stromkreise.* —

F. Neumann hat nachgewiesen, dass das wechselseitige Potential zweier geschlossener Stromkreise, für welches zunächst die Formel

$$P = -\int \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \cos(ds, ds')$$

gefunden wurde, sich auch darstellen lässt in der Form:

$$P = -\int \frac{ds\,ds'}{r} \frac{i}{V} \frac{i'}{V} \left(\frac{1+\varkappa}{2} \cos(ds, ds') + \frac{1-\varkappa}{2} \cos(r, ds) \cos(r, ds') \right)$$

wobei $\varkappa$ eine beliebige Zahl bedeutet. v. Helmholtz zeigt, dass dieses der allgemeinste Ausdruck ist, welcher sich mit den bei der Ableitung benutzten Erfahrungssätzen verträgt, und *setzt demgemäss als Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier Strom-*

elemente das Potential

$$P = -\frac{ds\,ds'}{r}\frac{i}{V}\frac{i'}{V}\left(\frac{1+\varkappa}{2}\cos(ds, ds') + \frac{1-\varkappa}{2}\cos(r, ds)\cos(r, ds')\right)$$

voraus. $\varkappa$ ist dabei als eine uns noch unbekannte Konstante anzusehen. — Die *ponderomotorischen Kräfte* sollen nach v. Helmholtz derart sein, dass ihre Arbeit bei einer beliebigen virtuellen Verrückung, während i und i' konstant bleiben, durch die Abnahme von P angegeben wird. Die in i', ds' durch i, *ds inducirte elektromotorische Kraft* andererseits soll angegeben werden durch die Geschwindigkeit dP/dt, mit der P sich ändert, wenn bei der Berechnung i jederzeit den wirklichen Werth und i' den Werth 1 erhält (vergl. Art. 25 und 36).

Im Uebrigen kommen nach v. Helmhotz die einfachen Sätze der Erfahrung zur Anwendung, d. h. für die elektrische Kraft wegen der freien Elektricität und für die magnetische Kraft wegen des freien Magnetismus die aus den Coulomb'schen Gesetzen folgenden skalaren Potentiale, und für die magnetische Kraft infolge der Bewegung der Elektricität das Biot-Savart'sche Gesetz.

54. *Vergleich des Elementarpotentials mit der Erfahrung.* Für die Erfahrung kommen zunächst *geschlossene* Stromsysteme in Betracht. Für die Wechselwirkung eines solchen mit einem Stromelement erhalten wir nach v. Helmholtz das Potential:

$$P = -ds'\frac{i'}{V}\int\frac{ds}{r}\frac{i}{V}\left(\frac{1+\varkappa}{2}\cos(ds, ds') + \frac{1-\varkappa}{2}\cos(r, ds)\cos(r, ds')\right),$$

und dessen Aenderungen sollen direkt die elektrodynamischen Kräfte ergeben. Nach F. Neumann ist das ganz anders. (Vergl. Art. 24 und 36). Die bei der Bewegung von ds' inducirte elektromotorische Kraft z. B. darf nicht durch den hingeschriebenen Ausdruck von P direkt, sondern durch den Werth von P für den Rand der vom Element beschriebenen Fläche beurtheilt werden. Entsprechendes gilt für die ponderomotorische Kraft. So ist denn klar, dass wir nach v. Helmholtz wesentlich andere elektrodynamische Kräfte erhalten als nach F. Neumann; für die elektromotorische Kraft insbesondere ergiebt sich nicht der Faraday'sche Ausdruck, nach welchem die Zahl der geschnittenen magnetischen Kraftlinien entscheidend ist, und für die ponderomotorischen Kräfte folgt ein völlig anderes System als das nach dem Ampère'schen oder dem Grassmann'schen Gesetz oder nach

dem Biot-Savart'schen Gesetz und seinem Komplement, die hier sämmtlich gleiche Resultate ergeben. —

Wird ein Leiter im Felde eines Stromsystemes so bewegt, dass sein Potential sich nicht ändert, so müsste nach v. Helmholtz in ihm keine inducirte elektromotorische Kraft auftreten. Damit scheinen zunächst Beobachtungen im Widerspruche zu sein, welche v. Helmholtz selbst zur Prüfung des elementaren Potentialgesetzes anstellte, und die oben schon citirt wurden (Art. 36). Aus ihnen ist zu schliessen, dass ein fester Körper, der in einem elektrodynamischen Felde rotirt, welches in Bezug auf die Axe symmetrisch ist, sich infolge inducirter elektromotorischer Kräfte elektrisch ladet, trotzdem das Potential P für alle seine Elemente unverändert bleibt. *Die Erklärung sieht v. Helmholtz in der Bewegung des mitgerissenen Mediums ausserhalb des Rotationskörpers — etwa des freien Aethers.* Die in diesem äusseren Medium erzeugten inducirten Kräfte sollen Polarisationen zur Folge haben und so die Elektrisirung des rotirenden Körpers verursachen.

Hieraus und aus anderen ähnlichen Betrachtungen folgt, dass eine mit den Beobachtungen verträgliche Durchführung der v. Helmholtz'schen Theorie die Annahme einer (sehr starken) Fähigkeit der dielektrischen Polarisation für alle Nichtleiter, insbesondere auch für den freien Aether, unbedingt verlangt. (Vergl. Art. 59).

55. *Die ponderomotorischen Kräfte*[1]). Was die ponderomotorischen Kräfte anbetrifft, so unterscheidet sich das v. Helmholtz'sche Potentialgesetz insofern grundsätzlich von den Elementargesetzen nach Ampère, Grassmann und Biot-Savart, als es auch *Drehmomente* ergiebt. Man kann das ganze System der wechselwirkenden Kräfte zwischen zwei Stromelementen i, ds i', ds' nach v. Helmholtz zerlegen:

in eine abstossende Kraft zwischen den Stromelementen, welche dem Ampère'schen Gesetze entspricht,

in eine abstossende Kraft zwischen je einem der Stromelemente und je einem der Enden des anderen, deren Intensität

$$= \frac{i}{V} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{e'}{V}\right) \cdot \frac{\cos(r, ds)}{r} ds$$

ist, wenn i, ds das Stromelement und $e' = \pm\int i' dt$ die am Stromelementende heraustretende Elektricität bedeutet,

in eine abstossende Kraft zwischen je zweien Stromenden von der Intensität

1) Vergl. v. Helmholtz, Wiss. Abh. I, p. 695—6.

$$-\frac{1+\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{V}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{e'}{V}\right).$$

Die erste dieser drei Arten von Kräften ist proportional mit $1/r^2$, die zweite mit $1/r$, die dritte von r unabhängig. —

56. *Elektrodynamische Feldgleichungen für ein ruhendes System.* Was die weitere Ausführung der v. Helmholtz'schen Theorie anbetrifft, so wird es hinreichend sein, wenn die Folgerungen für ein ruhendes System im Anschluss an die grosse Abhandlung von 1870 „*Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*" [1]) dargelegt werden, die uns ebenso, wie die Maxwell'schen Arbeit, an welche sie sich anlehnt, zu einer elektrodynamischen Theorie des Lichtes führt.

Zur Vereinfachung der Darstellung schliessen wir Magnetisirung aus, berücksichtigen also nur galvanische Ströme und Ströme infolge dielektrischer Verschiebung.

$\mathsf{K}^{(e)}$ sei die elektrische Kraft infolge der freien Elektricität, $\mathsf{K}^{(i)}$ die inducirte elektrische Kraft. Es ist dann nach dem Potentialgesetz:

$$\text{(1a)}\quad \mathsf{K}_\nu^{(i)} = -\frac{1}{V}\frac{d}{dt}\int\frac{d\omega}{r}\frac{\gamma}{V}\left(\frac{1+\varkappa}{2}\cos(\nu,\gamma)+\frac{1-\varkappa}{2}\cos(r,\nu)\cos(r,\gamma)\right).$$

Das beigefügte Zeichen (1a) gehört zu den entsprechenden Gleichungssystem bei v. Helmholtz. — Durch Umformung folgt:

$$\text{(1d)}\qquad \mathsf{K}_\nu^{(i)} = -\frac{1}{V}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1-\varkappa}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+\Gamma_\nu\right\},$$

wobei

$$\text{(2d)}\qquad \Phi = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\omega}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{V}\right)$$

eine durch die zeitlichen Veränderungen des Potentiales φ der freien Elektricität bestimmte Raumfunktion und Γ das Vektorpotential der ganzen Strömung $\gamma \cong \gamma^{(\varphi)} + d^a\varepsilon/dt$ bedeutet:

$$\Gamma_\nu = \int\frac{d\omega}{r}\frac{\gamma_\nu}{V}.$$

Hierzu kommt

$$\mathsf{K}_\nu^{(e)} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}.$$

Für die magnetische Kraft H liefert das Biot-Savart'sche

---

1) Borchardt's Journal f. reine u. angew. Math., 1871, Bd. 72, S. 57; Wiss. Abh. I, p. 545.

Gesetz (Art. 23):

$$\mathsf{H} \cong -\mathrm{Quirl}\, \Gamma.$$

Zur Vervollständigung des Systemes der Gleichungen, welche den Zusammenhang der elektrodynamischen Grössen bestimmen, fehlt nun noch eine Verbindungsgleichung zwischen der elektrischen Kraft und der elektrischen Strömung; sie lautet nach v. Helmholtz für isotrope Medien:

$$\gamma \cong c\mathsf{K} + h\frac{d^a \mathsf{K}}{dt},$$

wobei

$$\gamma^{(g)} \cong c\mathsf{K}, \qquad \varepsilon \cong h\mathsf{K}$$

gesetzt ist; es wird also den elektrischen Theilchen, welche sich im galvanischen Strom und bei der dielektrischen Polarisation bewegen, eine verschwindende Trägheit beigelegt.

Unter K ist in den letzten Formeln die gesammte antreibende elektrische Kraft zu verstehen, die sich aus $\mathsf{K}^{(e)}$, $\mathsf{K}^{(i)}$, und einem von der Materie herrührenden „äusseren" Antheil $\mathsf{K}^{(a)}$ ergiebt:

$$\mathsf{K} \cong \mathsf{K}^{(e)} + \mathsf{K}^{(i)} + \mathsf{K}^{(a)}.$$

57. *Differentiale Form der Feldgleichungen.* Die vorstehenden Formeln liefern uns für K und H folgende *differentiale Feldgleichungen*:

$$\text{(20d)} \qquad \mathrm{Div}\,\mathsf{K} = \mathrm{Div}\,\mathsf{K}^{(a)} - \Delta\varphi + \varkappa\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$\text{(20c)} \qquad V\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{K} \cong \frac{d^a \mathsf{H}}{dt} + V\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{K}^{(a)},$$

$$\text{(20f)} \qquad \mathrm{Div}\,\mathsf{H} = 0,$$

$$\text{(20e)} \qquad V\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{H} \cong -\frac{d^a \mathsf{K}^{(e)}}{dt} - 4\pi c\mathsf{K} - 4\pi h\frac{d^a \mathsf{K}}{dt}.$$

58. *Bedeutung der Konstanten V.* Wenn entsprechend den Erörterungen der Artikel 53 und 54 auch der freie Aether dielektrisch polarisirbar vorausgesetzt wird, so ist unter V nicht mehr das in gewöhnlicher Weise bestimmte Verhältniss der elektrostatischen zur elektromagnetischen Elektricitätseinheit zu verstehen, sondern dasjenige, welches sich in einem polarisationsfreien Zwischenmittel ergeben würde; V' sei das *scheinbare*, aus den Messungen im freien Aether folgende Verhältniss. Um den Zusammenhang zwischen V und V' zu erkennen, muss man beachten, dass die Polarisation des Zwischenmittels die elektrostatischen Fernkräfte verändert. v. Helmholtz benutzt die Ueberlegungen des Art. 17, schliesst demgemäss, dass die Fernkräfte bei gleicher

Elektrisirung proportional mit $1/(1+4\pi h)$ sind und setzt:

$$V = \sqrt{1+4\pi h'}\,V' = \sqrt{k'}\,V',$$

wenn h' die Polarisationskonstante, k' die Dielektricitätskonstante des freien Aethers bedeutet. — Wenn der freie Aether auch magnetisirbar sein sollte, so würde noch ein weiterer entsprechender Faktor zu V' hintreten. —

59. *Elektrodynamische Theorie des Lichtes.* Für ein homogenes nichtleitendes Medium, in welchem äussere elektrische Kräfte nicht wirksam sind, folgt mittelst der Gleichungen des Art. 57:

$$\text{(21c)} \qquad \frac{d^2 \mathsf{K}_v}{dt^2} = \frac{V^2}{4\pi h} \Delta \mathsf{K}_v - \frac{V^2}{4\pi h}\left(1 - \frac{1+4\pi h}{\varkappa}\right) \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Div} \mathsf{K}.$$

Gleichungen derselben Art bestimmen gemäss der gewöhnlichen Elasticitätstheorie die Verschiebungen in einem materiellen elastischen festen Körper; die Entwicklungen dieser Theorie können daher angewandt werden und lehren, dass die elektrodynamischen Störungen sich in *Transversalwellen* mit der Geschwindigkeit

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi h}} V = \sqrt{\frac{h'}{h}} \sqrt{\frac{1+4\pi h'}{4\pi h'}}\, V'$$

und in *Longitudinalwellen* mit der Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{1+4\pi h}{4\pi h \varkappa}}\, V = \sqrt{\frac{h'}{h} \frac{1+4\pi h}{1+4\pi h'}}\, \frac{1+4\pi h'}{\sqrt{4\pi h' \varkappa}}\, V'$$

fortpflanzen. Die Geschwindigkeiten im freien Aether ergeben sich, wenn $h = h'$ gesetzt wird. h/h' und $(1+4\pi h)/(1+4\pi h') = k/k'$ sind die beobachtbaren Quotienten aus den Polarisationskonstanten und den Dielektricitätskonstanten, und stellen für das betreffende Medium die gewöhnlich kurzweg Polarisationskonstante und Dielektricitätskonstante genannten Zahlen dar. —

Erfahrungsmässig ist V' sehr nahe gleich der Lichtgeschwindigkeit; betrachten wir also die transversalen elektrodynamischen Wellen als Licht, so ist $4\pi h'$ vielmals grösser als 1 anzunehmen, d. h. *es muss dem freien Aether eine bedeutende Fähigkeit der dielektrischen Polarisation zugeschrieben werden.* In Art. 54 erfuhren wir, dass dieselbe Bedingung auch durch andere elektrodynamische Erscheinungen gestellt wird. — Die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist im freien Aether $\sqrt{1+4\pi h'}/\sqrt{\varkappa}$ mal so gross als die der transversalen Wellen; da bei den Lichterscheinungen longitudinale Wellen niemals merklich werden, muss $\sqrt{1+4\pi h'}/\sqrt{\varkappa}$

eine so grosse Zahl sein, dass ihre Geschwindigkeit für die Praxis als unendlich gelten kann. —

60. *Ergebniss der v. Helmholtz' schen Theorie.* Wird nun der Erfahrung entsprechend $4\pi h'$, d. h. die Fähigkeit der dielektrischen Polarisation, für den freien Aether sehr gross angenommen, so folgt, dass die von uns thatsächlich beobachtete *„freie“* Elektricität stets nur einen sehr kleinen Bruchtheil der *„wahren“* bildet, und dass darum das System der elektrischen Strömungen jederzeit sehr nahe in sich geschlossen ist. *Hiernach leitet uns die v. Helmholtz' sche Theorie bei vollständiger Durchführung zu dem Maxwell' schen Prinzip der stets geschlossenen Ströme zurück.*

Auch das System der Feldgleichungen wird dementsprechend schliesslich gleich dem nach Maxwell. Wenn wir von äusseren elektrischen Kräften der Einfachheit wegen absehen, lässt sich (20e) schreiben:

$$4\pi h \frac{d^a \mathsf{K}^{(i)}}{dt} + (1+4\pi h)\frac{d^a \mathsf{K}^{(\epsilon)}}{dt} + 4\pi\gamma^{(\epsilon)} \cong -V \operatorname{Quirl} \mathsf{H}.$$

Ist $4\pi h$ sehr gross gegen 1, so darf an Stelle hiervon auch treten

$$(1+4\pi h)\frac{d^a \mathsf{K}}{dt} + 4\pi\gamma^{(\epsilon)} \cong -V \operatorname{Quirl} \mathsf{H};$$

diese Gleichung aber und (20c):

$$\frac{d^a \mathsf{H}}{dt} \cong V \operatorname{Quirl} \mathsf{K}$$

bilden, wie in Art. 66 dargelegt werden wird, den eigentlichen Kern der Maxwell' schen Feldgleichungen bei den hier angenommenen Beschränkungen. —

61. *Schlussbemerkung.* Es scheint hiernach möglich, einen grossen Theil der sachlichen Vortheile der Maxwell' schen Elektrodynamik auch dann zu erreichen, wenn das Prinzip der direkten Fernwirkungen beibehalten wird. Ein Rückblick aber lehrt, dass das System der physikalischen Hypothesen sich dabei nicht einfacher gestaltet. So wird denn der schwere Verlust, welchen unsere Naturauffassung erleidet, wenn sie darauf verzichten soll, dem Mechanismus der Uebermittlung der Fernwirkungen nachzugehen, durch keine entsprechenden Vortheile aufgewogen.

§ 10. Vereinfachung der Maxwell'schen Theorie für ruhende Systeme durch Heaviside und Hertz.

62. *Mittel der Vereinfachung.* Die *formale* Vereinfachung der Theorie wurde durch O. Heaviside[1]) und H. Hertz[2]) erzielt, indem sie

die *Hypothese der inkompressiblen Elektricität* ganz bei Seite liessen, dementsprechend auch den totalen elektrischen Strom wieder in seine Bestandteile zerlegten;

das *elektrokinetische Moment* $\mathfrak{A}$ eliminirten,

die gesonderte Behandlung des zur freien Elektricität gehörigen Antheils der elektrischen Kraft aufgaben.

Wohl noch bedeutungsvoller als diese Verbesserung der Rechnung, ist die Umgestaltung der physikalischen Grundlagen. Hatte Maxwell gezeigt, dass man an Stelle der alten Vorstellungsbilder auch andere setzen könne, so führen uns Heaviside und Hertz zu voller Freiheit, *indem sie alle unnöthig speciellen hypothetischen Vorstellungen beseitigen.* Die Theorie wird dadurch freilich eines Theils ihres Inhalts beraubt, vielleicht gerade desjenigen, dem wir ihre Entstehung verdanken, aber es verschwindet dafür das Baugerüst, welches den eigentlichen Kern verhüllt.

63. *Umwandlung der Formeln.* Der totale elektrische Strom $\gamma^{(t)}$ tritt in den Gleichungen (I) und (E) auf (Art. 44):

$$\text{(I)}\quad \gamma^{(t)} \cong \frac{k}{4\pi}\frac{d^*\mathsf{K}}{dt} + c\mathsf{K}; \qquad \text{(E)}\quad 4\pi\frac{\gamma^{(t)}}{V} \cong -\operatorname{Quirl}\mathsf{H}.$$

Die Vereinigung beider ergiebt:

$$\text{(I, E).}\qquad k\frac{d^*\mathsf{K}}{dt} + 4\pi c\mathsf{K} \cong -V\operatorname{Quirl}\mathsf{H}.$$

Das elektrokinetische Moment $\mathfrak{A}$ und das Potential φ der freien Elektricität sind in den Gleichungen (A) und (B) enthalten:

$$\text{(A)}\quad H \cong -V\operatorname{Quirl}\mathfrak{A}; \qquad \text{(B)}\quad \mathsf{K} \cong \mathsf{K}^{(v)} - \frac{d^*\mathfrak{A}}{dt} + \mathsf{K}^{(\varphi)}$$

$\mathsf{K}^{(v)}$ bedeutet denjenigen Antheil an K, der auf Rechnung der Bewegung der Materie im magnetischen Felde kommt, und $\mathsf{K}^{(\varphi)}$ den zu φ gehörigen Theil. Um $\mathfrak{A}$ und $\mathsf{K}^{(\varphi)}$ zu eliminiren, lassen wir

---

1) Electrical Papers, vol. I. p. 429 (Electrician 1885), vol. II p. 375 (Phil. Mag., 1888).

2) Gött. Nachr. 19. März 1890; Wied. Ann. 40, p. 577; Unters. üb. d. Ausbr. d. elektr. Kraft, Leipz. 1892, p. 208.

den Theil $K^{(v)}$ ganz bei Seite, ihn einer besonderen Behandlung zuweisend, bilden den Quirl von K und verwerthen (A); das Resultat ist dann:

$$\text{(A, B)} \qquad \frac{d^a H}{dt}\left(\cong p\frac{d^a \mathsf{H}}{dt}\right) \cong V \text{Quirl}\, \mathsf{K}.$$

Die *Grundlagen der Elektrodynamik für ruhende Systeme*, wie sie sich nun bei Vermeidung aller speciellen hypothetischen Vorstellungen ergeben, sollen im Folgenden im Anschluss an Hertz kurz dargelegt werden.

64. *Elektrodynamische Vorgänge im freien Aether*, *Hertz'sche Gleichungen.* Im *freien Aether* sind zwei verschiedene elektrodynamische Zustandsänderungen, eine elektrische und eine magnetische zu unterscheiden, von denen jede durch einen *Vektor* gemessen werden kann, die eine durch die sogenannte *„elektrische Kraft"* K, die andere durch die sogenannte *„magnetische Kraft"* H. Mit den Zustandsänderungen ist eine Aenderung des Energieinhalts verbunden, deren Ausdruck in K und H von den gewählten Einheiten abhängt; wir können und wollen K und H so definiren, *dass die elektrodynamische Energie im Volumelement* $d\omega$ *durch*

$$dE = d\omega\left(\frac{1}{8\pi}\mathsf{K}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathsf{H}^2\right)$$

angegeben wird. Ueber die jeweiligen Werthe von K und H und ihre Veränderungen können wir experimentell durch das Verhalten elektrisirter und magnetisirter Körper leicht Aufschluss erhalten; es ist nicht nöthig hier näher darauf einzugehen. —

Die Veränderungen von K *und* H *sind durch die beiden folgenden Formeln verkettet und bestimmt:*

$$\frac{d^a \mathsf{K}}{dt} \cong -V \text{Quirl}\, \mathsf{H}, \qquad \frac{d^a \mathsf{H}}{dt} \cong V \text{Quirl}\, \mathsf{K}.$$

Diese wurden zuerst von H. Hertz im Jahre 1884 veröffentlicht[1]) und werden daher nach ihm benannt. — Aus ihnen folgt:

$$\frac{d}{dt}\text{Div}\, \mathsf{K} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\text{Div}\, \mathsf{H} = 0;$$

erfahrungsgemäss ist überall

$$\text{Div}\, \mathsf{K} = 0, \qquad \text{Div}\, \mathsf{H} = 0.$$

Damit sind zugleich die Gesetze der Elektrodynamik und der

1) Wied. Ann. 23, p. 84, 1884.

Optik dargestellt; die Lichtgeschwindigkeit ergiebt sich $= V$. (Vergl. Art. 87.)

65. *Elektrodynamische Vorgänge in Nichtleitern.* Die Komplikation, welche in materiellen Nichtleitern eintritt, lässt sich am einfachsten beschreiben, wenn neben K und H noch zwei weitere Vektoren, die „*elektrische Induktion*" K und die „*magnetische Induktion*" H zur Beschreibung der elektrodynamischen Vorgänge herangezogen werden, welche mit ihnen in vielen Fällen als linear verbunden gelten dürfen. Speciell in isotropen Medien darf oftmals gesetzt werden:

$$K \cong k\mathsf{K}, \qquad H \cong p\mathsf{H},$$

wo dann k die „*Dielektricitätskonstante*" und p die „*magnetische Permeabilität*" heisst.

Unter Benutzung der Induktionen wird die Feldenergie

$$d\mathsf{E} = d\omega\left(\frac{1}{8\pi} K\mathsf{K}\cos(K,\mathsf{K}) + \frac{1}{8\pi} H\mathsf{H}\cos(H,\mathsf{H})\right)$$

und erhalten die verkettenden Gleichungen die Gestalt:

$$\frac{d^e K}{dt} \cong -V\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{H}, \qquad \frac{d^e H}{dt} \cong V\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{K}.$$

Aus den letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Div}\,K = 0, \qquad \frac{d}{dt}\,\mathrm{Div}\,H = 0.$$

Erfahrungsgemäss ist die Divergenz von K oftmals von 0 verschieden, die Divergenz von H dagegen stets $= 0$.

Nimmt man lineare Verbindungen von K mit K und von H mit H an, so erhält man die gewöhnliche dispersionslose Optik für anisotrope und isotrope Medien. Speciell in isotropen Medien wird die Lichtgeschwindigkeit

$$V^{(k,p)} = \frac{V}{\sqrt{kp}}.$$

Zur näheren Ausführung der Theorie und vor allem, sobald man Komplikationen in Rücksicht ziehen will, empfiehlt es sich, neben K und H noch zwei weitere Hülfsvektoren zu benutzen, die „*dielektrische Polarisation*" ε und die „*Magnetisirung*" μ, welche sich in den Feldgleichungen mit K und H nicht multiplikativ wie K und H, sondern additiv verbinden. Ihre Beziehungen zu K und K, H und H werden durch die Gleichungen

$$K \cong \mathsf{K} + 4\pi\varepsilon, \qquad H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu$$

geliefert. Benutzt man sie an Stelle von K und H, so ergiebt sich:

$$dE = d\omega\left(\frac{1}{8\pi}K^2 + \frac{1}{8\pi}H^2\right) + d\omega\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon K\cos(\varepsilon, K) + \tfrac{1}{2}\mu H\cos(\mu, H)\right);$$

$$\frac{d^a K}{dt} + 4\pi\frac{d^a\varepsilon}{dt} \cong -V\text{Quirl}\,H, \qquad \frac{d^a H}{dt} + 4\pi\frac{d^a\mu}{dt} \cong V\text{Quirl}\,K,$$

$$\frac{d}{dt}\text{Div}\,K + 4\pi\frac{d}{dt}\text{Div}\,\varepsilon = 0, \qquad \frac{d}{dt}\text{Div}\,H + 4\pi\frac{d}{dt}\text{Div}\,\mu = 0.$$

Der Erfahrungsthatsache Div $H = 0$ entspricht

$$\text{Div}\,H = -4\pi\,\text{Div}\,\mu.$$

66. *Hertz-Heaviside'sche Gleichungen für den allgemeinen Fall.* In den beiden vorhergehenden Artikeln wurden specielle Fälle behandelt. Der allgemeine Fall ergiebt sich, wenn neben der *dielektrischen Polarisation* und der *Magnetisierung* auch ein *galvanischer Strom* zugelassen wird. In der ersten der verkettenden Gleichungen tritt dann ein neuer Vektor $\gamma^{(g)}$ auf, der nach seiner praktischen Bedeutung als die *„galvanische Strömung"* bezeichnet werden kann; wir erhalten:

$$\frac{d^a K}{dt} + 4\pi\gamma^{(g)} \cong -V\text{Quirl}\,H, \qquad \frac{d^a H}{dt} \cong V\text{Quirl}\,K,$$

oder:

$$\frac{d^a K}{dt} + 4\pi\frac{d^a\varepsilon}{dt} + 4\pi\gamma^{(g)} \cong -V\text{Quirl}\,H, \quad \frac{d^a H}{dt} + 4\pi\frac{d^a\mu}{dt} \cong V\text{Quirl}\,K.$$

Aus diesen Gleichungen, welche wir weiterhin *„Hertz-Heaviside'sche Gleichungen"* nennen werden, folgt

$$\frac{d}{dt}\text{Div}\,K + 4\pi\,\text{Div}\,\gamma^{(g)} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\text{Div}\,H = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\text{Div}\,K + 4\pi\frac{d}{dt}\text{Div}\,\varepsilon + 4\pi\,\text{Div}\,\gamma^{(g)} = 0, \quad \frac{d}{dt}\text{Div}\,H + 4\pi\frac{d}{dt}\text{Div}\,\mu = 0.$$

Für die elektrodynamische Energie bleiben die Formeln des vorigen Artikels bestehen.

67. *Wahre und freie Elektricität; Satz von der Erhaltung der Elektricität.* Man bezeichnet:

$\frac{1}{4\pi}$ Div K als Raumdichte der *„wahren Elektricität"*,

$\frac{1}{4\pi}$ Div K als Raumdichte der *„freien Elektricität"*,

$\frac{1}{4\pi}$ Div H als Raumdichte des „*wahren Magnetismus*",

$\frac{1}{4\pi}$ Div H als Raumdichte des „*freien Magnetismus*".

Die Raumdichte des wahren Magnetismus ist erfahrungsmässig stets $= 0$.

Schreiben wir $\mathrm{Div}\, K = 4\pi\chi^{(we)}$, $\mathrm{Div}\, \mathsf{K} = 4\pi\chi^{(fe)}$, $\mathrm{Div}\, H = 4\pi\chi^{(wm)}$, $\mathrm{Div}\, \mathsf{H} = 4\pi\chi^{(fm)}$, so ergiebt sich im allgemeinen Falle dielektrischer Polarisation, elektrischer Leitung und Magnetisirung:

$$\frac{d}{dt}\chi^{(we)} = -\mathrm{Div}\,\gamma^{(g)}, \qquad \frac{d}{dt}\chi^{(wm)} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\chi^{(fe)} = -\frac{d}{dt}\mathrm{Div}\,\varepsilon - \mathrm{Div}\,\gamma^{(g)}, \qquad \frac{d}{dt}\chi^{(fm)} = -\frac{d}{dt}\mathrm{Div}\,\mu.$$

Diese Sätze sprechen das „*Gesetz von der Erhaltung der Elektricität*" und das Analogon für den Magnetismus aus.

68. *Integrale Form der verkettenden Gleichungen.* Die verkettenden Gleichungen des allgemeinen Falles (Art. 66) erhalten durch Integration über endliche Flächenstücke die folgende Gestalt:

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, K_\nu + 4\pi i^{(g)} = -V\!\int d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda, \qquad \frac{d}{dt}\int d\sigma\, H_\nu = V\!\int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, \mathsf{K}_\nu + 4\pi\frac{d}{dt}\int d\sigma\, \varepsilon_\nu + 4\pi i^{(g)} = -V\!\int d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, \mathsf{H}_\nu + 4\pi\frac{d}{dt}\int d\sigma\, \mu_\nu = V\!\int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda.$$

Durch Anwendung auf geschlossene Flächen folgt:

$$\frac{de^{(w)}}{dt} = -\int d\sigma\, \gamma_\nu^{(g)}, \qquad \frac{dm^{(w)}}{dt} = 0,$$

$$\frac{de^{(f)}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int d\sigma\, \varepsilon_\nu - \int d\sigma\, \gamma_\nu^{(g)}, \qquad \frac{dm^{(f)}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int d\sigma\, \mu_\nu;$$

es wurde dabei gesetzt:

$$4\pi e^{(w)} = \int d\sigma\, K_\nu = \int d\sigma\, \mathsf{K}_\nu + 4\pi\int d\sigma\, \varepsilon_\nu$$

$$4\pi m^{(w)} = \int d\sigma\, H_\nu = \int d\sigma\, \mathsf{H}_\nu + 4\pi\int d\sigma\, \mu_\nu;$$

$$4\pi e^{(f)} = \int d\sigma\, \mathsf{K}_\nu, \qquad 4\pi m^{(f)} = \int d\sigma\, \mathsf{H}_\nu. \text{ —}$$

In dieser integralen Form können die Gleichungen in sehr bequemer Weise auch zur Behandlung von Unstetigkeitsflächen benutzt werden. —

69. *Mathematische Grundlagen der Maxwell'schen Theorie; Beziehungen zur Erfahrung.* Die kurze Uebersicht der Artikel 64—68 enthält die *vollständigen mathematischen Grundlagen der Maxwell'schen Theorie*, wie sie sich nach Hertz und Heaviside bei Beseitigkeit aller nicht unbedingt nothwendigen Begriffe ergeben. *Wir sehen, dass es sich im Grunde nur um die 3 Sätze handelt, welche durch die beiden verkettenden Gleichungen zwischen* K und H *und durch die Energieformel gegeben werden.* — Diese Erkenntniss hat unabhängig von Heaviside und Hertz schon J. H. Poynting im Anfang des Jahres 1885 ausgesprochen[1]). Er benutzt dabei zur Formulirung der Verkettung die integralen Sätze des vorigen Artikels. —

Nach Art. 23 ergiebt sich

$$\frac{d^e \mathsf{K}}{dt} + 4\pi\gamma \cong -V \operatorname{Quirl} \mathsf{H}$$

aus den Erfahrungssätzen der gewöhnlichen Elektrodynamik, wenn die Gültigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes auch für ungeschlossene Ströme angenommen wird, und man unter K die zur freien Elektricität gemäss dem Coulomb'schen Gesetz gehörige elektrische Kraft, unter γ die ganze elektrische Strömung versteht, für welche in unserem Falle

$$\gamma \cong \frac{d^e \varepsilon}{dt} + \gamma^{(\varrho)}$$

zu setzen ist.

Ein Vergleich mit der ersten verkettenden Gleichung der vereinfachten Maxwell'schen Theorie nach Art. 66:

$$\frac{d^e \mathsf{K}}{dt} + 4\pi \frac{d^e \varepsilon}{dt} + 4\pi\gamma^{(\varrho)} \cong -V \operatorname{Quirl} \mathsf{H}$$

lehrt unmittelbar, dass diese eine Verallgemeinerung unserer Folgerung aus dem Biot-Savart'schen Gesetze darstellt, welche die Beziehung zur Elektrostatik und damit die Bedingung

$$\operatorname{Quirl} \mathsf{K} = 0$$

bei Seite schiebt. Weil die Gleichung im Uebrigen unverändert beibehalten wird, führt sie ihrerseits zu dem Gesetz der Erhaltung der Elektricität, welches bei ihrer Ableitung aus der Erfahrung angenommen wurde.

---

1) Phil. Trans. Lond. Roy. Soc. 1885, vol. 176, II, p. 277.

Was die zweite verkettende Gleichung der Theorie

$$\frac{d^a H}{dt} \cong V\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{K},$$

und die Formel für die Energie:

$$d\mathsf{E} = d\omega\left(\frac{1}{8\pi}K\mathsf{K}\cos(K,\mathsf{K}) + \frac{1}{8\pi}H\mathsf{H}\cos(H,\mathsf{H})\right)$$

$$= d\omega\left(\frac{1}{8\pi}\mathsf{K}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathsf{H}^2\right) + d\omega\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\mathsf{K}\cos(\varepsilon,\mathsf{K}) + \tfrac{1}{2}\mu\mathsf{H}\cos(\mu,\mathsf{H})\right)$$

anbetrifft, so erkannten wir schon bei der Darstellung der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie, dass sie sich an die Erfahrung unmittelbar anschliessen.

70. *Bewegungen der elektrodynamischen Energie*; *Poynting'sche Energieströmung.* Die verkettenden Gleichungen des Art. 66 ergeben mittels einfacher Rechnungen für die elektrodynamische Energie in einem beliebig begrenzten Raum:

$$\frac{d\mathsf{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\int d\omega\left(\frac{1}{8\pi}K\mathsf{K}\cos(K,\mathsf{K}) + \frac{1}{8\pi}H\mathsf{H}\cos(H,\mathsf{H})\right)$$

$$= -\int d\sigma\, S_\nu - \int d\omega\, \gamma^{(\varphi)}\mathsf{K}\cos(\gamma^{(\varphi)},\mathsf{K}).$$

Hierin bedeutet der Vektor S die von Poynting entdeckte „Energieströmung" (vergl. Art. 47); S hat also die Intensität

$$\frac{V}{4\pi}\mathsf{K}\mathsf{H}\sin(\mathsf{K},\mathsf{H}),$$

steht senkrecht auf K und H und ist so gerichtet, dass die Richtung aus derjenigen der zu H normalen Komponente von K durch Drehung um $\pi/2$ im Sinne von H hervorgeht.

Gemäss der Formel für $d\mathsf{E}/dt$ wird vom System bezogen auf die Zeiteinheit elektrodynamische Energie im Betrage von

$$\int d\omega\, \gamma^{(\varphi)}\mathsf{K}\cos(\gamma^{(\varphi)},\mathsf{K})$$

abgegeben. Nach der Erfahrung findet der Austausch, der Formel genau entsprechend, in den Volumelementen selbst statt und gehört zu der Joule'schen, der Thomson'schen, der Peltier'schen Wärme, zu chemischer Arbeit etc.

71. *Untersuchungen von E. Cohn.* Betrachtet man die elektrodynamischen Vorgänge in einem einzelnen Medium für sich, ohne auf die Beziehungen zu den Vorgängen in anderen Medien zu

achten, insbesondere auch ohne Vergleich mit dem freien Aether, so verliert die Unterscheidung zwischen K und K, bezüglich H und H ihre Bedeutung. Entsprechend werden in homogenen isotropen Medien, auf die wir uns hier beschränken wollen, auch die Konstanten V, k, p, c zunächst bedeutungslos. Um mit E. Cohn[1]) zu erkennen, was uns übrig bleibt, definiren wir an Stelle von K und K, bezüglich H und H zwei neue Vektoren K' und H' durch die Maxwell'sche Formel über die elektrodynamische Energie:

$$d\mathsf{E} = d\omega\left(\frac{1}{8\pi}\mathsf{K}'^2 + \frac{1}{8\pi}\mathsf{H}'^2\right).$$

Wenn dann noch γ mit K' proportional gesetzt wird, erhalten die verkettenden Gleichungen die Form:

$$\frac{d^a\mathsf{K}'}{dt} + \frac{1}{T'}\mathsf{K}' \cong -V'\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{H}', \qquad \frac{d^a\mathsf{H}'}{dt} \cong V'\,\mathrm{Quirl}\,\mathsf{K}',$$

wobei V', T' zwei Konstanten, und zwar V' die Lichtgeschwindigkeit im Medium, T' eine gewisse Zeit bedeutet. *Hieraus folgt, dass*

$$V' = \frac{V}{\sqrt{kp}} \quad \text{und} \quad T' = \frac{k}{4\pi c}$$

die einzigen Konstanten sind, welche das elektrodynamische Verhalten des Mediums charakterisiren, wenn man es für sich allein betrachtet. E. Cohn nennt sie die *„inneren" Konstanten.* —

T' giebt die Zeit an, in welcher die sich selbst überlassenen elektrischen Kräfte K' im Medium auf den e-ten Theil ihres Werthes herabsinken, und heisst darum nach E. Cohn die *„Relaxationszeit"*.

72. *Satz von Levi-Civita.* Ein interessanter Satz, welcher im Anschluss an die Theorie von Helmholtz von der Erfahrung durch die Annahme einer endlichen, bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Fernwirkungen zu den Hertz-Heaviside'schen Gleichungen führt, ist neuerdings von Levi-Civita[2]) angegeben worden; er lautet:

Bezeichnet $de(t)$ ein Theilchen freier Elektricität in einem beliebigen Volumenelement zur Zeit t und

$$\varphi = \int \frac{1}{r}\, de\left(t - r\frac{\sqrt{kp}}{V}\right)$$

---

1) Wied. Ann. **40**, p. 625, 1890; Vergl. auch Berl. Ber. 26, p. 405, 1889; Wied. Ann. 38, p. 50, 1889.

2) Nuovo Cimento, ser. 4, vol. VI, 1897.

ihr skalares Potential, wenn es unter der Annahme einer Ausbreitung mit der Lichtgeschwindigkeit $V/\sqrt{kp}$, berechnet wird; bezeichnet ferner $\gamma(t)$ die *„freie"* Strömung zur Zeit t, d. h. die *gesammte* Strömung, diejenige eingeschlossen, welche mit der Magnetisirung äquivalent ist, und Γ:

$$\Gamma_\nu = \int \frac{d\omega}{r} \frac{1}{V} \gamma\left(t - r\frac{\sqrt{kp}}{V}\right) \cos(\gamma, \nu),$$

das Vektorpotential der Strömung, ebenfalls berechnet unter der Annahme einer Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit, und setzt man dann

$$\mathsf{K}_\nu = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{1}{V}\frac{d\Gamma_\nu}{dt},$$

$$\mathsf{H} \cong -\frac{1}{p} \text{Quirl}\, \Gamma,$$

so ergeben sich für K und H die Verkettungsgleichungen der vereinfachten Maxwell'schen Theorie. —

§ 11. Ausführung der Maxwell'schen Theorie für bewegte Medien nach Hertz.

73. *Beschränkung des Bereiches der Theorie.* Während Maxwell die Theorie der Elektrodynamik für bewegte Medien nur in Einzelheiten behandelt, hat H. Hertz versucht[1]), sie der übrigen Theorie in systematischer Weise anzugliedern. Da wir in dieser Beziehung später zu einem wesentlich andern Standpunkt gelangen werden, ist es wichtig, der Untersuchung von Hertz mit einiger Ausführlichkeit zu folgen.

Für Maxwell ist es charakteristisch, dass er freien Aether und Materie grundsätzlich als etwas Gleichartiges behandelt. In seiner allgemeinen Theorie ist ihm die atmosphärische Luft z. B. eine einheitliche Flüssigkeit, in der nicht etwa zwischen Materie und Aether zu unterscheiden ist. Wenn die Luft komprimirt wird, so müssen wir uns denken, dass der ganze stoffliche Inhalt zusammenrückt, nicht etwa nur ein einzelner, der *materielle* Theil.

Diese einheitliche Behandlung des Rauminhalts behält H. Hertz bei. Er ist sich wohl bewusst, dass das nur ein Nothbehelf ist, welcher die Untersuchung — so nothwendig sie vom Standpunkt der Maxwell'schen Theorie erscheint, und so lehrreich sie unter allen Umständen bleibt — von vorne herein für die Erklärung

1) Wied. Ann. 41, p. 369, 1890; Unters. üb. d. Ausbr. d. elektr. Kraft, Leipz. 1892, p. 256.

des charakteristischen Verhaltens bewegter Materie gegenüber dem Licht unbrauchbar macht, und dass daher an ihre Unzulänglichkeit für eine allgemeine Theorie nicht gezweifelt werden kann.

„Es scheint nämlich“ — so sagt Hertz — „aus den vorhandenen Andeutungen hervorzugehen, dass der Aether auch im Innern der greifbaren Materie sich unabhängig von dieser bewege“; ..... „Wollen wir nun dieser Vorstellung unsere Theorie anpassen, so haben wir in jedem Punkt des Raumes die elektromagnetischen Zustände des Aethers und der greifbaren Materie in gewissem Sinne als unabhängig zu betrachten.“ .... „Anders liegt die Sache, wenn wir uns ausgesprochenermassen begnügen, die elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne in dem Umfange darzustellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind. Wir dürfen behaupten, dass unter den so eingeschränkten Erscheinungen sich keine befindet, welche uns zwingt, eine von der ponderablen Materie unabhängige Bewegung des Aethers im Innern derselben zuzugeben“; .... „Wenigstens die eigentlichen elektrischen und magnetischen Erscheinungen müssen sich also vertragen mit der Vorstellung, dass eine solche Verschiebung überhaupt nicht stattfindet, dass vielmehr der hypothetisch im Innern der ponderabeln Materie vorausgesetzte Aether sich nur zugleich mit dieser bewege.“ .... „Wir adoptiren sie für die vorliegende Abhandlung. Die auf solcher Grundlage aufgebaute Theorie wird dann freilich nicht den Vorzug besitzen, auf jede ihr vorgelegte Frage die richtige oder auch nur eine bestimmte Antwort zu geben: sie giebt aber wenigstens auf jede ihre vorgelegte Frage mögliche Antworten an, d. h. Antworten, welche weder mit den beobachteten Erscheinungen, noch mit den an ruhenden Körpern gewonnenen Anschauungen in Widerspruch treten.

Wir setzen also voraus, dass dem raumerfüllenden Mittel in jedem Punkte eine einzige bestimmte Geschwindigkeit beizulegen sei,“ ....

74. *Hertz'sches Princip.* Um nun nach dieser Beschränkung der Aufgabe zu einer Theorie für bewegte Medien zu gelangen, stellt Hertz folgendes Princip auf:

Die elektrodynamischen Erscheinungen verlaufen so, als ob die elektrischen und magnetischen Induktionen[1]) K und H die Bewegungen des raumerfüllenden Mittels einfach mitmachen und dabei nur diejenigen Aenderungen erleiden, welche die ver-

1) In der Ausdrucksweise von Hertz sind es die „*Polarisationen*“.

kettenden Gleichungen auch für den Fall der Ruhe vorschreiben; *d. h. es gelten die integralen Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, K_\nu + 4\pi i^{(\sigma)} = -V\int d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda, \qquad \frac{d}{dt}\int d\sigma\, H_\nu = V\int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda$$

unverändert auch in bewegten Medien, wenn man sich vorstellt, dass die Flächenstücke, auf welche sie sich beziehen, die Bewegung des Mediums mitmachen.

Hertz selbst giebt übrigens die hingeschriebenen Gleichungen nicht an, sondern die folgenden differentialen, welche sich aus ihnen für ein ruhendes rechtwinkliges Koordinatensystem ergeben:

$$\frac{\partial K_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v_y K_x - v_x K_y) - \frac{\partial}{\partial z}(v_x K_z - v_z K_x) + v_x\left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\right)$$
$$+ 4\pi\gamma_x^{(\sigma)} = -V\left(\frac{\partial \mathsf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{H}_y}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z K_y - v_y K_z) - \frac{\partial}{\partial x}(v_y K_x - v_x K_y) + v_y\left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\right)$$
$$+ 4\pi\gamma_y^{(\sigma)} = -V\left(\frac{\partial \mathsf{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathsf{H}_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{dK_z}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x K_z - v_z K_x) - \frac{\partial}{\partial y}(v_z K_y - v_y K_z) + v_z\left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\right)$$
$$+ 4\pi\gamma_z^{(\sigma)} = -V\left(\frac{\partial \mathsf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{H}_x}{\partial y}\right),$$

$$\frac{dH_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(v_y H_x - v_x H_y) - \frac{\partial}{\partial z}(v_x H_z - v_z H_x) + v_x\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right)$$
$$= V\left(\frac{\partial \mathsf{K}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{K}_y}{\partial z}\right),$$

$$\frac{dH_y}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z H_y - v_y H_z) - \frac{\partial}{\partial x}(v_y H_x - v_x H_y) + v_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right)$$
$$= V\left(\frac{\partial \mathsf{K}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathsf{K}_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{dH_z}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x H_z - v_z H_x) - \frac{\partial}{\partial y}(v_z H_y - v_y H_z) + v_z\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right)$$
$$= V\left(\frac{\partial \mathsf{K}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{K}_x}{\partial y}\right).$$

Eine interessante differentiale Formulirung des Hertz'schen Prinzips, welches ebenso wie die vorhin gegebene integrale zu-

gleich für ruhende und bewegte Medien gilt, ist von Vito Volterra 1891 mitgetheilt worden[1]).

Wendet man die Hertz'schen Differentialgleichungen *auf ein im Raume fest gedachtes Flächenstück von endlichen Dimensionen an, so folgt durch Integration eine weitere Formulirung der verkettenden Gleichungen*:

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, K_\nu - V\overline{\int} d\lambda\, \mathsf{H}'_\lambda + 4\pi\int d\sigma\, v_\nu\, \chi^{(we)} + 4\pi\int d\sigma\, \gamma_\nu^{(g)} = -V\overline{\int} d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, H_\nu + V\overline{\int} d\lambda\, \mathsf{K}'_\lambda + 4\pi\int d\sigma\, v_\nu\, \chi^{(wm)} = V\overline{\int} d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda.$$

Es bedeuten hierbei H' und K' zwei Hülfsvektoren, welche den zweiten und dritten Gliedern der Differentialgleichungen entsprechen. H' steht senkrecht auf v und K und hat die Intensität

$$\mathsf{H}' = \frac{v}{V} K \cos(v, K);$$

K' steht senkrecht auf v und H und hat die Intensität

$$\mathsf{K}' = \frac{v}{V} H \cos(v, H).$$

$\chi^{(we)}$ und $\chi^{(wm)}$ sind die Raumdichten der „*wahren Elektricität*“ und des „*wahren Magnetismus*“:

$$4\pi\chi^{(we)} = \mathrm{Div}\, K; \qquad 4\pi\chi^{(wm)} = \mathrm{Div}\, H.$$

75. *Bewegungen der Elektricität.* Die im vorigen Artikel für *bewegte* Flächenstücke aufgestellten integralen Gleichungen liefern bei Anwendung auf die vollständige Oberfläche eines beliebigen Theiles des bewegten Mittels die Formeln:

$$\frac{d}{dt}\overline{\int} d\sigma\, K_\nu = \frac{d}{dt}\overline{\int} d\sigma\, \mathsf{K}_\nu + 4\pi\frac{d}{dt}\overline{\int} d\sigma\, \varepsilon_\nu = -4\pi\overline{\int} d\sigma\, \gamma_\nu^{(g)},$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\int} d\sigma\, H_\nu = \frac{d}{dt}\overline{\int} d\sigma\, \mathsf{H}_\nu + 4\pi\frac{d}{dt}\overline{\int} d\sigma\, \mu_\nu = 0.$$

Die erste Zeile spricht den Satz von der Erhaltung der Elektricität für bewegte Medien aus, die zweite die Unveränderlichkeit der wahren Magnetisirung. — Die von Hertz selbst angegebenen entsprechenden Gleichungen beziehen sich wieder auf ein ruhendes rechtwinkliges Koordinatensystem und lauten in unserer Bezeich-

1) Nuovo Cimento, 3 ser., t. 29, p. 53.

nungsweise:

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Div} K + v_x\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Div} K + v_y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Div} K + v_z\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Div} K + \operatorname{Div} v \cdot \operatorname{Div} K$$
$$= 4\pi\frac{d\chi^{(we)}}{dt} = -4\pi \operatorname{Div} \gamma^{(e)},$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Div} H + v_x\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Div} H + v_y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Div} H + v_z\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Div} K + \operatorname{Div} v \cdot \operatorname{Div} H$$
$$= 4\pi\frac{d\chi^{(wm)}}{dt} = 0.$$

76. *Zusammenhang mit der Erfahrung.* Die zweite der verkettenden Gleichungen nach Hertz für ein mit dem Medium bewegtes Flächenstück:

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, H_\nu = V\int d\lambda\, K_\lambda$$

spricht einfach das Faraday'sche Gesetz der Induktion für bewegte Medien im veränderlichen Magnetfelde aus; die erste stellt eine hypothetische Uebertragung des für ruhende Systeme gewonnenen Gesetzes auf bewegte dar.

Sieht man in der zweiten der verkettenden Gleichungen in der zuletzt angegebenen Form:

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\, H_\nu + V\int d\lambda\, \mathsf{K}'_\lambda + 4\pi\int d\sigma\, v_\nu\, \chi^{(wm)} = V\int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda,$$

einen Ausdruck der Gesetze der Induktion, so wird die gesammte inducirte elektromotorische Kraft

$$E = \int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda$$

in drei Theile zerlegt. Der erste erscheint als Folge der Veränderung des magnetischen Feldes, der zweite als Folge der Bewegung der Materie im Felde, der dritte als Folge der Bewegung des wahren Magnetismus. Der letzte Theil hat keine praktische Bedeutung, da wahrer Magnetismus erfahrungsmässig niemals auftritt; die beiden anderen schliessen sich auf das engste an die Erfahrung an. Blicken wir zurück auf Art. 37, so werden wir versucht, dem Vektor K' als „*die durch Bewegung der Materie im magnetischen Felde inducirte elektrische Kraft*“ eine objektive Existenz beizulegen: *Dies darf aber nach H. Hertz durchaus nicht geschehen, weil damit der absoluten Bewegung der Materie im Raume eine Bedeutung zugeschrieben würde.* K' *ist vielmehr als eine Rechnungsgrösse aufzufassen; der eigentliche Sitz der elektromotorischen*

Kräfte, welche sie darstellt, ist nicht an der betreffenden Stelle selbst, sondern überall da zu suchen, wo das die Welt erfüllende Medium Deformationen erleidet. Hertz gelangt also zu einem ganz ähnlichen Standpunkt, wie v. Helmholtz (vgl. Art. 54); auch für ihn verlieren die so einfachen und eleganten Sätze für die durch Bewegung inducirte elektrische Kraft, welche aus den Untersuchungen von Faraday und F. E. Neumann folgen (Art. 37), und welche Maxwell ohne weiteres in seine Theorie aufnahm (Art. 44), jeden direkten physikalischen Sinn und werden zu Ergebnissen komplicirter Rechnung.

Die erste der verkettenden Gleichungen kann in entsprechender Weise zerlegt werden. Sie zeigt dann „durch Bewegung indurirte magnetische Kräfte“ an, für welche bisher in der Erfahrung kein Anzeichen gefunden wurde, steht also ganz auf dem Boden der Hypothese.

77. *Ponderomotorische Kräfte.* In der Behandlung der ponderomotorischen Kräfte schliesst sich Hertz vollständig an Maxwell an. Er erklärt sie also durch Drucke nach Art der in der gewöhnlichen Elasticitätstheorie angenommenen, welche durch die elektrischen und magnetischen Erregungen verursacht werden; nur lässt er nach dem Vorgange von v. Helmholtz[1]) allgemeinere Beziehungen zu, sodass nicht nur die gewöhnlich betrachteten ponderomotorischen Kräfte sondern auch die Elektrostriktion etc. erklärt wird.

Für den freien Aether ergiebt sich das einfache System der Maxwell'schen Drucke. Sehr bemerkenswerth ist, dass diese im Allgemeinen in nicht stationären Feldern und insbesondere bei den Lichtschwingungen den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht entsprechen. Wenn der Aether also im Anschluss an Maxwell und Hertz als eine Flüssigkeit angesehen wird, so müsste gefolgert werden, dass er z. B. bei den Lichtschwingungen in Bewegung geräth; Anzeichen für derartige Komplikationen sind bisher noch nicht beobachtet worden. —

Untersuchungen über die Bedingungen der Bewegungen des reinen Aethers hat v. Helmholtz 1893 veröffentlicht[2]). (Vergl. Art. 83.)

78. *Schlussbemerkung über die Hertz'sche Theorie.* Hertz schliesst seine Arbeit „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper“ mit den folgenden Worten:

1) Wied. Ann. 13 p. 385. 1881; Ges. Abh. I p. 798.

2) Sitzungsber. d. Berl. Ak., 6. Juli 1893, Wied. Ann. 53, p. 135; Ges. Abh. III, p. 526.

„Zum Schluss wünsche ich nochmals hervorzuheben, dass ich der hier vorgetragenen Theorie der elektromagnetischen Kräfte in bewegten Körpern einen Werth nur vom Standpunkt der systematischen Ordnung an beilege. Die Theorie zeigt, wie wir die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern vollständig behandeln können unter gewissen Beschränkungen, welche wir übrigens willkürlich uns selbst auferlegten. Dass diese Beschränkungen dem Falle der Natur entsprechen, ist wenig wahrscheinlich. Die richtige Theorie dürfte vielmehr eine solche sein, welche in jedem Punkte die Zustände des Aethers von denen der eingebetteten Materie unterscheidet. Die Aufstellung einer dieser Anschauung entsprechenden Theorie aber scheint mir zur Zeit mehr und willkürlichere Hypothesen zu erfordern, als die hier vorgetragene Theorie".

Der Versuch, welchen Hertz hiernach noch nicht wagte, in der Theorie der Elektrodynamik zwischen den Zustandsänderungen des Aethers und der Materie zu unterscheiden, ist später von Anderen unternommen worden. Darüber ist im nächsten und letzten Theil dieser Arbeit zu berichten. Es zeigt sich, dass die Grundlagen der Theorie nicht nur nicht komplicirter werden, wie Hertz befürchtete, sondern sich sogar erheblich einfacher gestalten.

IV. Theorie der Elektrodynamik unter Rücksicht auf die molekulare Konstitution der Materie.

§ 12. Theorie von H. A. Lorentz.

§ 79. *Aether und Materie.* Der erste, welcher die Maxwell'sche Theorie unter prinzipieller Berücksichtigung der molekularen Konstitution der Materie ausarbeitete, war H. A. Lorentz[1]); er verfolgte dabei die Absicht, die Theorie für die Behandlung der Optik bewegter Medien brauchbar zu machen.

Aus dem berühmten Versuch Fizeau's über die Bewegung des Lichtes in strömenden Flüssigkeiten ist mit Sicherheit zu schliessen, dass der Aether die Bewegung der Materie nicht einfach mitmacht, und dass es hoffnungslos ist, eine Theorie der Optik bewegter Medien aufbauen zu wollen, welche hierauf nicht Rücksicht nimmt. Zu der gleichen Ansicht drängen auch Schwierigkeiten in der Erklärung der Aberration des Lichtes, welche unübersteiglich scheinen[2]), wenn man in der Weise von Hertz (Art. 73) an jeder Stelle der Welt eine einheitliche Bewegung des erfüllenden Mittels voraussetzt. Unter solchen Umständen entschloss sich Lorentz zu der *Annahme, dass der Aether sich an den wahrnehmbaren Bewegungen der Materie überhaupt nicht betheiligt und dauernd ruht. Die sinnlich wahrnehmbare Materie müssen wir uns dann vorstellen als bestehend aus einzelnen kleinen Körpern,*

---

1) La théorie electromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leide, E. J. Brill, 1892, auch: Arch. néerl., **25**, p. 363, 1892; Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden, E. J. Brill, 1895.

2) Vergl. H. A. Lorentz, Arch. néerl., **21**, p. 103, 1887, Lodge, Phil. Trans. Lond., 184 A, p. 727, 1898; H. A. Lorentz, Zittungsversl. d. Akad. Amsterdam 1892—93, p. 97.

den Atomen, welche im Aether eingebettet sind und sich bewegen, ohne ihn merklich mitzureissen. — Wie Lorentz ausdrücklich betont, soll nicht eine Ruhe des Aethers im absoluten Sinne des Wortes behauptet werden, sondern nur, dass die etwaigen Bewegungen für uns nicht in Betracht kommen.

Durch diese Hypothesen wird in die Elektrodynamik eine fundamentale Unterscheidung zwischen Aether und Materie eingeführt; es handelt sich nun nicht mehr um rein quantitative Unterschiede, wie wir bei der Darstellung der Maxwell'schen und Hertz'schen Theorie noch annehmen konnten, sondern um Bezeichnungen für zwei ihrem inneren Wesen nach durchaus verschiedene Gegenstände. —

Neuere Untersuchungen von Lodge[1]) über das optische Verhalten des Aethers in der Nachbarschaft sehr schnell bewegter materieller Körper und von Zehnder[2]) über die Möglichkeit, Aether durch Pumpwerke zu bewegen, haben wichtige weitere Stützen für die Anschauung gegeben, dass der Aether von der Bewegung der sinnlich wahrnehmbaren Materie nicht beeinflusst wird.

80. *Ionentheorie der Elektrisirung.* Die Erfahrung lehrt uns, dass die Elektrisirung an die Materie geknüpft ist, und ferner — durch die Faraday'schen Gesetze der elektrolytischen Leitung —, dass sie an der molekularen Konstitution der Materie Antheil nimmt. In Elektrolyten besteht die Leitung der Elektricität einfach in einer Konvektion durch die geladenen Atome und Atomgruppen, den „*Ionen*“, in der Ausdrucksweise Faraday's. Giese[3]) hat die Hypothese aufgestellt, dass auch die Elektrisirung und Elektricitätsleitung der Metalle auf solchen Ionenladungen beruhe. Der Unterschied der metallischen und der elektrolytischen Leitung soll darin bestehen, dass der Austausch der Ladungen, welcher in Elektrolyten nur an den Elektroden stattfindet, in den Metallen die eigentliche Bewegung der Elektricität verursacht. Lorentz schreibt hierzu[4]):

„Ist somit die Annahme dieses Ueberganges oder Austausches der Ionenladungen — eines freilich noch sehr dunklen Vorganges — die unerlässliche Ergänzung jeder Theorie, welche eine Fortführung der Elektricität durch Ionen voraussetzt, so besteht ein anhaltender elektrischer Strom auch nie in einer Konvektion *allein*,

1) Phil. Trans. Lond. 184 A. p. 727, 1893; Proc. Roy. Soc. 61, p. 31, 1897.
2) Wied. Ann. 55, p. 65, 1895.
3) Wied. Ann. 37, p. 576, 1889.
4) Versuch einer Theorie etc. 1895, p. 6.

wenigstens dann nicht, wenn die Mittelpunkte zweier sich berührender oder mit einander verbundener Theilchen in einiger Entfernung l von einander liegen. Die Elektricitätsbewegung geschieht dann ohne Konvektion über eine Strecke von der Ordnung l, und nur wenn diese sehr klein ist im Verhältnis zu den Strecken, über welche eine Konvektion stattfindet, hat man es im Ganzen fast nur mit dieser letzteren Erscheinung zu thun.

Hr. Giese ist der Meinung, dass in Metallen eine wirkliche Konvektion gar nicht im Spiele sei. Da es aber nicht möglich scheint, das „Ueberspringen“ der Ladungen in die Theorie aufzunehmen, so wolle man entschuldigen, dass ich meinerseits von einem solchen Vorgange gänzlich absehe und mir den Strom in einem Metalldraht einfach als eine Bewegung geladener Theilchen denke.

Weitere Forschung wird darüber zu entscheiden haben, ob die Ergebnisse der Theorie bei einer anderen Auffassung bestehen bleiben“.

Der eigentliche elektrische Strom wird also von Lorentz für die Ausarbeitung der Theorie stets als Konvektionsstrom aufgefasst.

Es sei erlaubt, die Umwandlung, welche die Theorie dann erfährt, ebenfalls mit Worten von Lorentz selbst zu schildern, die sich an die soeben citirten unmittelbar anschliessen:

„§ 3. Die Ionentheorie war für meinen Zweck sehr geeignet, weil sie es ermöglicht, die Durchdringlichkeit für den Aether in ziemlich befriedigender Weise in die Gleichungen einzuführen. Natürlich zerfallen diese in zwei Gruppen. Erstens ist auszudrücken, wie der Zustand des Aethers durch Ladung, Lage und Bewegung der Ionen bestimmt wird; sodann ist, zweitens, anzugeben, mit welchen Kräften der Aether auf die geladenen Theilchen wirkt. In meiner bereits citirten Abhandlung[1]) habe ich die Formeln mittels des D'Alembert'schen Prinzips aus einigen Annahmen abgeleitet und also einen Weg gewählt, der mit Maxwell's Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen viele Aehnlichkeit hat. Jetzt ziehe ich es der Kürze wegen vor, die Grundgleichungen selbst als Hypothesen hinzustellen.

Die Formeln für den Aether stimmen, was den Raum zwischen den Ionen betrifft, mit den bekannten Gleichungen der Maxwell'schen Theorie überein und drücken im allgemeinen aus, dass sich jede Veränderung, welche ein Ion im Aether hervorruft, mit

1) La théorie electromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, 1892.

der Geschwindigkeit des Lichtes fortpflanzt. Die Kraft aber, die der Aether auf ein geladenes Theilchen ausübt, betrachten wir als abhängig von dem Zustande, in welchem jenes Medium an der Stelle, wo das Theilchen ist, sich befindet".

81. *Elektricität und ihre Bewegung.* Zur Darstellung des elektrodynamischen Zustandes des Aethers in der Umgebung der Materie und in dieser selbst benutzt Lorentz die Maxwell'sche Verschiebung $\mathfrak{D}$ und die magnetische Kraft H; im Folgenden wird $\mathfrak{D}$ durch die elektrische Kraft:

$$\mathsf{K} \cong 4\pi\mathfrak{D}$$

ersetzt werden. —

Im freien Aether gilt

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{K} = 0.$$

Im Innern der Materie bewirken die Ionen eine Aenderung; ihre Ladung haben wir uns dabei nach Lorentz über einen gewissen Raum vertheilt zu denken. Bedeutet χ die Dichte der freien Elektricität, d. h. ist

$$\mathrm{Div}\,\mathsf{K} = 4\pi\lambda,$$

so ist also der Werth von χ für jedes Ion in einem gewissen Bereich von 0 verschieden. Etwaige Unstetigkeitsflächen berücksichtigt Lorentz in der Entwicklung der allgemeinen Theorie nicht weiter, indem er sie unter Benutzung desselben Kunstgriffes, den wir so oft benutzten, als Grenzfälle betrachtet. — Für einen endlichen Raum folgt

$$\int d\sigma\,\mathsf{K}_\nu = 4\pi\int d\omega\,\chi = 4\pi e.$$

„In den zu betrachtenden Fällen ist χ nur im Innern einer sehr grossen Anzahl von kleinen und gänzlich von einander getrennten Räumen von Null verschieden. Wir können jedoch mit dem allgemeineren Falle anfangen, dass in beliebig grossen Räumen eine elektrische Dichtigkeit besteht. Da wir uns die elektrischen Ladungen immer an ponderable Materie gebunden denken, so würde das einer kontinuirlichen Vertheilung dieser Materie entsprechen.

Ponderable Materie, welche nicht geladen ist, kommt für uns nur insofern in Betracht, als sie auf die Ionen Molekularkräfte ausübt. Was die elektrischen Erscheinungen betrifft, so hat sie gar keinen Einfluss und geschieht alles so, als ob der von ihr eingenommene Raum nur den Aether enthielte" [1]).

1) Versuch einer Theorie etc., p. 15.

Im Aether selbst ist nach Lorentz zunächst der Maxwell'sche Verschiebungsstrom in Betracht zu ziehen:

$$\frac{d^a \mathfrak{D}}{dt} \cong \frac{1}{4\pi} \frac{d^a \mathsf{K}}{dt};$$

zu diesem tritt der *Konvektionsstrom*

$$\chi v$$

hinzu, wenn v die Geschwindigkeit der Materie bedeutet, *sodass wir im Ganzen einen Strom*:

$$\gamma^{(s)} \cong \frac{1}{4\pi} \frac{d^a \mathsf{K}}{dt} + \chi v$$

zu berücksichtigen haben. Für einen beliebigen Raum ergiebt sich:

$$\overline{\int} d\sigma \gamma_\nu^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \overline{\int} d\sigma \mathsf{K}_\nu + \overline{\int} d\sigma \chi v_\nu$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \overline{\int} d\sigma \mathsf{K}_\nu - \frac{de}{dt} = 0,$$

wenn die Lorentz'sche Voraussetzung beachtet wird, dass alle Elektricitätsbewegung für die Rechnung als Konvektion aufgefasst werden kann. Wir erkennen, dass diese Voraussetzung uns zu der Maxwell'schen Bedingung

$$\mathrm{Div}\, \gamma^{(s)} = 0$$

führt.

82. *Feldgleichungen für den Aether.* Die Gleichung $\mathrm{Div}\, \gamma^{(s)} = 0$ ermöglicht es Lorentz, ähnlich wie Maxwell (Art. 44) zu setzen:

$$4\pi \gamma^{(s)} \cong \frac{d^a \mathsf{K}}{dt} + 4\pi \chi v \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, \mathsf{H}.$$

Damit ist dann eine der beiden verkettenden Gleichungen zwischen K und H festgestellt, die andere wird der Maxwell'schen Theorie ohne Weiteres entnommen:

$$\frac{d^a \mathsf{H}}{dt} \cong V \,\mathrm{Quirl}\, \mathsf{K}.$$

Die Grundlagen der einfachen Maxwell'schen Theorie würden sich ergeben, wenn man für isotrope Medien:

$$\chi v \cong h \frac{d^a \mathsf{K}}{dt} + c\mathsf{K}$$

schreiben und für anisotrope Medien die entsprechenden allgemeineren Annahmen machen wollte.

83. *Einwirkung des Aethers auf die Materie.* Was nun die zweite Seite der Erscheinungen anbetrifft, die Einwirkung des Aethers auf die Materie, so nimmt Lorentz für jedes elektrische Theilchen $de = d\omega\chi$ zwei verschiedene ponderomotorische Kräfte an, von denen die eine durch die elektrische Erregung des Aethers im Bereiche des Volumelementes, die andere durch die magnetische Erregung bestimmt wird. *Die zur elektrischen Erregung gehörige ponderomotorische Kraft* entspricht genau den in der Elektrostatik beobachteten mechanischen Kräften und ist

$$\cong d\omega\chi \mathsf{K}.$$

Die zur magnetischen Erregung gehörige ponderomotorische Kraft entspricht den in Stromsystemen beobachteten mechanischen Kräften und wird durch das Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes fast unmittelbar vorgewiesen; sie hat die Intensität

$$d\omega\chi \frac{v}{V} \mathsf{H} \cos(v, \mathsf{H}),$$

steht senkrecht auf v und H und ist so gerichtet, dass ihre Richtung aus derjenigen der zu H senkrechten Komponente von v durch Drehung um $\pi/2$ im Sinne von H hervorgeht. —

Die Erklärung dieser Kräfte könnte man nach Lorentz im Hinblick auf Maxwell'sche Theorie zunächst in Spannungen des Aethers suchen, die ganze hier vertretene Auffassung aber drängt zu einem andern Standpunkt. Zu seiner Kennzeichnung will ich wiederum ein Citat[1]) verwenden: Wer die von Maxwell angegebene Bestimmung der Drucke für allgemein gültig hält, „muss schliessen, dass in allen Fällen, wo der Poynting'sche Energiestrom mit der Zeit veränderlich ist, der Aether als Ganzes in Bewegung geräth. Es wäre dann weiter die Art der entstehenden Aetherströmungen zu erforschen und unter Berücksichtigung derselben die Frage nach den ponderomotorischen Wirkungen aufs neue in Angriff zu nehmen.

Die Grundzüge einer Theorie der genannten Aetherströmungen wurden noch von Hermann von Helmholtz' Meisterhand entworfen in einer[2]) der letzten Arbeiten, die es ihm vergönnt war, zu vollenden.

Hier kann auf die eben berührten Fragen nicht eingegangen werden, da die Grundannahme, von der wir ausgegangen sind, eine andere Auffassung mit sich bringt. In der That, weshalb

1) Versuch einer Theorie etc., p. 27.

2) In Art. 77 citirt.

sollten wir, da wir doch einmal angenommen haben, dass der Aether sich nicht bewege, je von einer auf dieses Medium wirkenden Kraft reden? Das Einfachste wäre wohl, anzunehmen, dass auf ein Volumelement des Aethers, als Ganzes betrachtet, nie eine Kraft wirke, oder selbst den Begriff der Kraft auf ein solches Element, das doch nie von der Stelle rückt, nicht einmal anzuwenden. Freilich verstiesse diese Auffassung gegen den Satz von der Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung —, da wir ja Grund haben zu sagen, dass der Aether Kräfte auf die ponderable Materie *ausübe* —; aber, soviel ich sehe, zwingt nichts dazu, jenen Satz zu einem unbeschränkt gültigen Fundamentalsatz zu erheben.

Haben wir uns einmal für die so eben geschilderte Betrachtungsweise entschieden, so müssen wir auch von vornherein darauf verzichten, die" .... „ponderomotorischen Wirkungen auf Aetherspannungen zurückzuführen. Das wären ja Kräfte zwischen dem einen und dem anderen Theile des Aethers, und solche dürfen wir, wollen wir konsequent sein, nicht mehr annehmen".

So gelangt denn Lorentz zu der Ansicht, dass der überall vorhandene Aether gewissermaassen ein festes Gerüst abgiebt, von welchem zwar bewegende Kräfte auf die Materie ausgeübt werden, das sich aber selbst gegenüber der Rückwirkung nicht nachgiebig zeigt.

84. *Erhaltung der Energie; Poynting's Energieströmung.* Die Grundlagen für eine Theorie der Elektrodynamik sind nun vollständig bis auf den Nachweis des Austausches der elektrodynamischen Energie.

Die wegen der magnetischen Felderregung an der Materie angreifenden Kräfte stehen stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung und kommen daher nicht in Betracht; wir erhalten demgemäss für die im Zeitelement dt auf die Materie in einem beliebig begrenzten Raum übertragene elektrodynamische Energie den Ausdruck

$$dW = dt\int d\omega\, \chi v\, \mathsf{K} \cos(v, \mathsf{K}) = dt\int d\omega\, \gamma \mathsf{K} \cos(\gamma, \mathsf{K}).$$

Ersetzt man hier $\gamma \mathsf{K} \cos(\gamma, \mathsf{K})$ durch $\gamma_x \mathsf{K}_x + \gamma_y \mathsf{K}_y + \gamma_z \mathsf{K}_z$, dann $\gamma_x = \chi v_x$ durch $-\frac{1}{4\pi} V\left(\frac{\partial \mathsf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{H}_y}{\partial z}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{d\mathsf{K}}{dt}$, u. s. w., so ergeben Umformungen durch partielle Integration bei Rücksicht auf V Quirl $\mathsf{K} \cong d^*\mathsf{H}/dt$:

$$dW = -d\int d\omega \left(\frac{1}{8\pi}\mathsf{K}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathsf{H}^2\right) - dt\bar{\int} d\sigma\, S_\nu,$$

wobei S die Poynting'sche Energieströmung bedeutet:

$$S = \frac{V}{4\pi} \mathsf{KH} \cos(\mathsf{K}, \mathsf{H})$$

(vgl. Art. 47 und 70). Dem Satz von der Erhaltung der Energie wird also Genüge geleistet, wenn wir *in Uebereinstimmung mit Maxwell jedem Volumelement die elektrodynamische Energie*:

$$d\mathsf{E} = d\omega\left(\frac{1}{8\pi}\mathsf{K}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathsf{H}^2\right)$$

zuschreiben und nach Poynting annehmen, dass die Energie mit der Intensität S senkrecht zu K und H strömt.

85. *Schlussbemerkungen.* H. A. Lorentz geht nach Feststellung der Grundprinzipien, wie sie oben auseinandergesetzt wurden, dazu über, den Einfluss der Bewegung der materiellen Körper durch den Aether auf die elektrodynamischen und besonders die optischen Erscheinungen zu untersuchen, um das grosse Problem der Bewegung der Erde gegen den Aether behandeln zu können. Für uns andererseits kommt es wesentlich darauf an, den neuen Standpunkt gegenüber der allgemeinen Elektrodynamik festzustellen; dieses will ich hier unterlassen, da es bequemer scheint, die Diskussion an meine eigenen Untersuchungen zu knüpfen, welche in der gleichen Richtung, wie die von Lorentz liegen, sich aber von vorne herein gerade die Ausarbeitung der allgemeinen Theorie zur Aufgabe stellten.

§ 13. Theorie von E. Wiechert.

86. *Ausgangspunkt.* Meine Arbeiten über Elektrodynamik[1]), welche unabhängig von Lorentz geführt wurden, gingen von der Bemerkung aus, dass die Theorie sich sehr vereinfacht, wenn man die einzelnen elektrischen molekularen Körperchen, welche nach den Erfahrungen über die elektrolytische Leitung in der Materie angenommen werden müssen, als selbständige Elemente behandelt.

1) Ueber die Bedeutung des Weltäthers, Schriften d. phys.-ökonom. Ges. z. Königsberg Pr., 1894, p. [4]; Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung, ibid. 1896 p. 1; Ueber das Wesen der Elektricität, ibid. 1897 p. [3], auch: Naturwiss. Rundschau 8. 15. 22 Mai 1897. Maxwell's Theorie der Elektrodynamik etc., Naturwiss. Rundschau 21. Nov. 1896; Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik, Wied. Ann. 1896, 59, p. 283; Hypothesen für eine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, Göttinger Nachr., 1898, Heft 1.

Gerade so wie Lorentz sah ich mich veranlasst, den Aether auch innerhalb der Materie anzunehmen und von dieser zu unterscheiden, sowie ihn im Anschluss an die Fresnel'sche Erklärung der Aberration des Lichtes und der Fizeau'schen Experimente mit strömenden Flüssigkeiten als ruhend vorauszusetzen. (Vergl. Art. 79.)

87. *Vorbemerkungen über die Lichtbewegung im freien Aether.* Der Maxwell'schen Theorie entlehnen wir die Anschauung, dass das Licht eine elektrodynamische Erscheinung ist, und wollen, um jetzt zum Schluss auch in diesem Punkte recht deutlich hervortreten zu lassen, wie enge sich die Theorie an die Erfahrung anschliesst, zunächst die erfahrungsmässigen Sätze über die Lichtbewegung im freien Aether kurz feststellen, ehe wir daran gehen, die elektrodynamischen Vorgänge zu besprechen.

A sei einer der transveral schwingenden Vektoren; dann ergiebt die Erfahrung für ihn die Feldgleichungen:

$$\frac{d^2 A_\nu}{dt^2} = V^2 \Delta A_\nu, \quad \mathrm{Div}\, A = 0.$$

ν ist eine beliebige Richtung, eventuell eine der Koordinatenrichtungen x, y, z; die erste Gleichung kennzeichnet V als die Lichtgeschwindigkeit, die zweite formulirt das Gesetz der Transversalität.

Wir definiren einen zweiten Vektor A' so, dass für einen beliebigen Zeitmoment

$$\mathrm{Div}\, A' = 0, \quad \mathrm{Quirl}\, A' \cong -\frac{1}{V}\frac{d^a A}{dt}$$

und dauernd

$$\frac{d^a A'}{dt} \cong V\, \mathrm{Quirl}\, A$$

ist; dann folgt wegen der letzten Verfügung unter Benutzung eines Satzes in Art. 4:

$$V\frac{d}{dt}\mathrm{Quirl}_\nu A' = -V^2 \Delta A_\nu = -\frac{d^2 A_\nu}{dt^2},$$

also:

$$\frac{d^a A}{dt} \cong -V\, \mathrm{Quirl}\, A' + A^*,$$

wenn A^* einen von der Zeit unabhängigen Vektor bedeutet. Wenden wir die Gleichung auf den bei der Definition von A' ausgezeichneten Zeitmoment an, so folgt $A^* = 0$, und wir erhalten:

$$\frac{d^a A}{dt} \cong -V\, \mathrm{Quirl}\, A'.$$

Bei Multiplikation mit V und Quirlbildung ergiebt sich unter Rücksicht auf die Definitionsgleichung von $d^a A'/dt$:

$$\frac{d^2 A'_\nu}{dt^2} = V^2 \varDelta A'_\nu.$$

Damit ist bei Berücksichtigung von $\mathrm{Div}\, A' = 0$ erwiesen, dass A' einen weiteren Vektor darstellt, welcher die Lichtbewegungen mitmacht und transversal schwingt.

A und A' sind symmetrisch mit einander verbunden, denn es gilt:

$$\frac{d^a A}{dt} \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, A', \quad \frac{d^a A'}{dt} \cong V \,\mathrm{Quirl}\, A;$$

doch ist zu beachten, dass der eine Vektor stets *polar*, der andere *rotational* ist, und dass die Vorzeichen einer Seite der Gleichungen verschieden sein müssen.

Fügt man zu den verkettenden Gleichungen die Bedingungen $\mathrm{Div}\, A = 0$, $\mathrm{Div}\, A' = 0$ hinzu, so ist das entstehende System von Gleichungen genau gleichwerthig mit unserem Ausgangssystem:

$$\frac{d^2 A_\nu}{dt^2} = V^2 \varDelta A_\nu, \quad \mathrm{Div}\, A = 0$$

oder dem entsprechenden für A', denn unsere Ableitung lehrt, dass es aus jedem von diesen folgt, und einfache Rechnungen ergeben, dass auch das Umgekehrte zutrifft. *So können also die Erfahrungen über die Bewegung des Lichtes im freien Aether auch in dem Satze zusammengefasst werden, dass sich Vektorpaare A', A angeben lassen, welche dem Gleichungssystem*

$$\frac{d^a A}{dt} \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, A', \quad \frac{d^a A'}{dt} \cong V \,\mathrm{Quirl}\, A,$$
$$\mathrm{Div}\, A = 0, \qquad \mathrm{Div}\, A' = 0$$

Genüge leisten.

88. *Feldgleichungen im freien Aether.* Indem wir nun beachten, dass nach Art. 23 aus dem *Biot-Savart*'schen Gesetz für die Umgebung eines ungeschlossenen Stromsystemes zu folgern ist:

$$\frac{d^a \mathsf{K}}{dt} \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, \mathsf{H},$$

ebenso nach Art. 37 aus den Gesetzen der elektromagnetischen Induktion:

$$\frac{d^a \mathsf{H}}{dt} \cong V \,\mathrm{Quirl}\, \mathsf{K},$$

und indem wir weiter beachten, dass auch die Bedingungen $\mathrm{Div}\,\mathsf{K} = 0$, $\mathrm{Div}\,\mathsf{H} = 0$ der Erfahrung entsprechen, schliessen wir in Anlehnung an die *Maxwell'*sche Theorie, dass die beiden Vektoren K und H, welche die elektromagnetischen Zustandsänderungen des Aethers messen, ein Vektorenpaar A, A' darstellen, wie es die Optik verlangt, und *erhalten dann als allgemein gültig für den freien Aether die Hertz'schen Gleichungen (Art. 64)*:

$$\frac{d^{a}\mathsf{K}}{dt} \cong -V\mathrm{Quirl}\,\mathsf{H}, \quad \frac{d^{a}\mathsf{H}}{dt} \cong V\mathrm{Quirl}\,\mathsf{K},$$
$$\mathrm{Div}\,\mathsf{K} = 0, \qquad \mathrm{Div}\,\mathsf{H} = 0. \text{ —}$$

Durch Integration folgt aus den verkettenden Gleichungen für *beliebige Flächenstücke*:

$$\frac{d}{dt}\int d\sigma\,\mathsf{K}_{\nu} = -V\overline{\int} d\lambda\,\mathsf{H}_{\lambda}, \quad \frac{d}{dt}\int d\sigma\,\mathsf{H}_{\nu} = V\overline{\int} d\lambda\,\mathsf{K}_{\lambda}.$$

Jede geschlossene Fläche, welche ganz im freien Aether verläuft, erfüllt hiernach die Bedingungen:

$$\frac{d}{dt}\int^{\circ} d\sigma\,\mathsf{K}_{\nu} = 0, \quad \frac{d}{dt}\int^{\circ} d\sigma\,\mathsf{H}_{\nu} = 0.$$

Befindet sich in einem räumlichen Gebiet nur freier Aether, so gilt wegen des Verschwindens der Divergenz beider Vektoren für die Oberfläche

$$\overline{\int} d\sigma\,\mathsf{K}_{\nu} = 0, \quad \overline{\int} d\sigma\,\mathsf{H}_{\nu} = 0.$$

89. *Elektrische und magnetische Ladung materieller Körper.* Hüllt eine geschlossene Fläche, die selbst ganz im freien Aether verläuft, nicht nur freien Aether, sondern auch Materie ein, so ist $\overline{\int} d\sigma\,\mathsf{K}_{\nu}$ erfahrungsmässig im Allgemeinen von 0 verschieden. Es müssen dabei alle Flächen, welche dieselbe Materie und nicht mehr einschliessen, den gleichen Werth des Integrales haben, denn die Differenz zweier solcher Integrale giebt das Oberflächenintegral für den Raum zwischen den beiden Flächen an, und dieses ist $= 0$, weil der Raum nur freien Aether enthält. — Wird der gemeinsame Werth der Oberflächenintegrale mit $4\pi e$ bezeichnet:

$$\overline{\int} d\sigma\,\mathsf{K}_{\nu} = 4\pi e,$$

so heisst e die „*elektrische Ladung*" oder die „*Menge der Elektricität*" in der eingeschlossenen Materie. Nach dem Satze $d\left(\int^{\circ} d\sigma\,\mathsf{K}_{\nu}\right)/dt = 0$ des vorigen Artikels *ist diese Ladung unveränderlich, solange die Materie von freien Aether umgeben bleibt.*

Eine entsprechende „*magnetische Ladung*“ giebt es nicht, denn die Gleichung

$$\int^{o} d\sigma \, \mathsf{H}_{\nu} = 0$$

gilt erfahrungsmässig auch dann, wenn der Innenraum Materie enthält.

90. *Makroskopische Nachbildung elektromagnetischer Systeme.* Wir wollen uns im freien Aether theils ruhende, theils bewegte elektrische und unelektrische Körper in so grosser Zahl und in solcher Anordnung denken, *dass makroskopisch das Bild nachgeahmt wird, welches nach den Erfahrungen der Elektrolyse von den wirklichen körperlichen Systemen bei Berücksichtigung der Molekularstruktur zu entwerfen ist.* Indem wir passende Kräfte hinzunehmen und von den einfachen Vorstellungen des § 4 ausgehen, können sowohl „*Leiter*“ als auch „*Dielektrika*“ konstruirt werden, ferner mittels der Ampère'schen Theorie des Magnetismus auch „*magnetisirte*“ Gebiete. Die „Magnetisirung“ soll dabei dadurch zu Stande gebracht werden, dass wir elektrisirte Körper zwingen, sich in verhältnissmässig engen Bahnen herumzubewegen.

In einer Beziehung beschränken wir uns jedoch bei der Ausmalung des Bildes: *wir nehmen an, dass die Körper einander niemals berühren*, also stets vom freien Aether umgeben bleiben. Metallische Leitung scheint hiernach zunächst nicht darstellbar. —

Den nachgebildeten wirklichen Verhältnissen entsprechend, sind im Folgenden alle Räume, Flächen und Kurven, deren Dimensionen „endlich“ genannt werden, so gross zu wählen, dass dagegen der mittlere Abstand je zweier Körper verschwindend erscheint.

Ist Σ eine *geschlossene* Fläche, die im betrachteten Augenblick ganz im freien Aether liegt, und zertheilt man den abgegrenzten Raum durch Flächen, die ebenfalls im freien Aether liegen, so in Fächer, dass jedes einen einzigen der elektrisirten Körper enthält, so kann auf jedes Fach der Satz $\overline{\int} d\sigma \, \mathsf{K}_{\nu} = 4\pi e$ angewandt werden, und es ergiebt sich durch Addition aller Gleichungen für den Raum innerhalb Σ:

$$\overline{\int} d\sigma \, \mathsf{K}_{\nu} = 4\pi e,$$

wobei e nun die algebraische Gesammtsumme der ganzen in Σ eingeschlossenen Elektricität bedeutet. Wir bezeichnen e als die „*freie Elektricität*“. Wird unter K ein Vektor verstanden, der für unser System die Bedeutung eines Mittelwerthes hat, so darf

$$\text{Div}\, \mathsf{K} = 4\pi\chi$$

gefolgert werden, wobei χ die „*Raumdichte der freien Elektricität*“ darstellt. —

Σ sei nun zweitens eine *nicht* geschlossene Fläche, Λ ihr Rand; wir denken uns die Körper, welche Λ treffen würden, ein wenig so abgelenkt, dass Λ stets im freien Aether bleibt, wodurch für das ganze System nur eine unmerkliche Aenderung des Zustandes verursacht wird.

Σ wird im Allgemeinen fortdauernd von Körpern getroffen und durchschritten; wir fassen ein Zeitintervall t_1 bis t_2 ins Auge, das zwar sehr viele Durchgänge enthält, aber doch andererseits gegenüber derjenigen Zeit sehr klein ist, in welcher der Zustand des Systemes, im Grossen und Ganzen betrachtet, sich merklich ändert; dann darf

$$\frac{\sum \pm e}{t_2 - t_1} = i$$

als der „*Strom*“ durch Σ bezeichnet werden, wenn $\sum \pm e$ die algebraische Summe der in der betreffenden Richtung durch Σ hindurchgegangenen Elektricität bedeutet.

Es lassen sich stets in der Nähe von Σ durch Λ berandete Flächen angeben, die eine gewisse Zeit lang ganz im freien Aether liegen; für eine solche gilt in dem betreffenden Zeitintervall nach Art. 88 der Satz:

$$d\int d\sigma \, \mathsf{K}_\nu = -dt \, \bar{V} \int d\lambda \, \mathsf{H}_\lambda,$$

wobei die rechte Seite sich auf Λ bezieht. Diese Formel wenden wir für die Zeit von t_1 bis t_2 an, indem wir jedesmal plötzlich zu einer neuen Verbindungsfläche übergehen, sobald für die alte die Berührung mit einem materiellen Körper herannaht. Die benutzten Flächen (1), (2), ... (p), $(p+1)$ .... wählen wir so, dass sie im Allgemeinen mit Σ zusammenfallen und nur an den Stellen, wo jeweilig ein materieller Körper durch Σ hindurchgeht, mit ein wenig Spielraum ausweichen.

Bei dem Uebergang von einer Fläche (p) zur nächsten $(p+1)$ erleidet $\int d\sigma \, \mathsf{K}_\nu$ einen Sprung vom Betrage

$$\int_{(p+1)} d\sigma \, \mathsf{K}_\nu - \int_{(p)} d\sigma \, \mathsf{K}_\nu;$$

dieser wird, wie der hingeschriebene Ausdruck zeigt, gerade durch das Oberflächenintegral des zwischen $(p+1)$ und (p) gelegenen Raumes $(p+1, p)$ angegeben. Wir können und wollen annehmen, dass $(p+1, p)$ entweder nur freien Aether oder einen einzigen materiellen Körper enthält; im ersten Falle ist dann die Differenz der

Flächenintegrale, d. h. das Integral über die Oberfläche, $= 0$, im zweiten Falle $= \mp 4\pi e$, wenn e die Ladung des Körpers bedeutet; das — oder das +-Zeichen gilt, jenachdem in Bezug auf die Normalenrichtungen ν die Fläche $(p+1)$ hinter oder vor (p) liegt. Wir erkennen, dass jeder Uebergang von einer Fläche zur andern eine Veränderung von $\int d\sigma \mathsf{K}_\nu$ um $\mp \pi e$ verursacht und erhalten für das ganze Intervall von t_1 bis t_2:

$$\left(\int d\sigma \mathsf{K}_\nu\right)_{t_2} - \left(\int d\sigma \mathsf{K}_\nu\right)_{t_1} + 4\pi \sum \pm e = -V \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda.$$

Eine Division durch $t_2 - t_1$ ergiebt für die *Mittelwerthvektoren* von K und H

$$\frac{d}{dt} \int d\sigma\, \mathsf{K}_\nu + 4\pi i = -V \overline{\int} d\lambda\, \mathsf{H}_\lambda,$$

wobei nun die linke Seite auf Σ bezogen werden darf. Es *folgt weiter durch Uebergang zu unendlich kleinen Flächenstücken*:

$$\frac{d^a \mathsf{K}}{dt} + 4\pi\gamma \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, \mathsf{H},$$

wenn γ die mittlere Strömung bezeichnet.

γ umfasst in unserem Bilde die *gesammte Strömung*, welche durch „*Konvektion*“, „*dielektrische Verschiebung*“, „*galvanische Strömung*“ und „*Magnetisirung*“ gegeben wird. Wegen der Mitberücksichtigung der Magnetisirung ist H nicht die *magnetisirende*, sondern die *inducirende* magnetische Kraft, Maxwell's *magnetische Induktion*, und es muss daher H nun durch H ersetzt werden, um den festgesetzten Bezeichnungen gerecht zu werden. Wird gleichzeitig der auf die „*dielektrische Polarisation*“ kommende Antheil von γ, d. i. $d^a\varepsilon/dt$, sowie der auf die „Magnetisirung“ kommende Antheil, d. i. nach Art. 33: $-V\,\mathrm{Quirl}\,\mu$ herausgelöst, *so ergiebt sich*:

$$\frac{d^a \mathsf{K}}{dt} + 4\pi \frac{d^a \varepsilon}{dt} + 4\pi\gamma - 4\pi V \,\mathrm{Quirl}\, \mu \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, H,$$

also die Hertz-Heaviside'sche Gleichung:

$$\frac{d^a K}{dt} + 4\pi\gamma \cong -V \,\mathrm{Quirl}\, \mathsf{H},$$

wenn wieder

$$K \cong \mathsf{K} + 4\pi\varepsilon, \qquad H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu$$

gesetzt wird. —

Bisher wurden nur zwei der vier Hertz'schen Gleichungen für den freien Aether benutzt. Die beiden noch fehlenden,

$d^{*}\mathsf{H}/dt \cong V$ Quirl K und Div H = 0, ergeben durch entsprechende Rechnungen unter Rücksicht auf die Erfahrung, dass eine magnetische Ladung niemals auftritt, für die elektrodynamischen Mittelwerthvektoren unseres Systemes die noch fehlenden *Hertz-Heaviside' schen Gleichungen:*

$$\frac{d^{*}H}{dt} \cong V\,\text{Quirl}\,\mathsf{K}, \qquad \text{Div}\,H = 0. —$$

Wir wollen zum Schluss noch beachten, dass in unseren Rechnungen die Wirkungen der einzelnen Körper sich einfach addiren, sodass die gesammte Felderregung als Superposition der Einwirkung der einzelnen Körper erscheint.

91. *Wirkliche materielle elektrodynamische Systeme.* Der vorige Artikel zeigt, dass schon die Annahme der für den freien Aether gefundenen elektrodynamischen Feldgleichungen zusammen mit der Erfahrungsthatsache, das nur *elektrische* Ladungen, nicht aber *magnetische* Ladungen vorkommen, hinreichend ist, um für unsere makroskopische Nachbildung elektrodynamischer Systeme die *Hertz-Heaviside'schen Gleichungen* (Art. 66):

$$\frac{d^{*}K}{dt} + 4\pi\gamma \cong -V\,\text{Quirl}\,\mathsf{H}, \quad \frac{d^{*}H}{dt} \cong V\,\text{Quirl}\,\mathsf{K}$$

$$\text{Div}\,K = 4\pi\chi^{(w)}, \quad \text{Div}\,H = 0$$

zu ergeben. Wir können also die Feldgleichungen für die elektrodynamischen Erregungen in wirklichen materiellen Systemen unmittelbar den makroskopischen Nachbildungen entnehmen.

92. *Aether und Materie.* Die einfachsten Vorstellungen, um dieses zu erklären, trotzdem doch in der Materie die Atome vielfach ganz dicht gelagert scheinen, sind offenbar die folgenden: *Das elektrodynamische Feld, welches wir im freien Aether kennen lernen, setzt sich auch im Innern der Materie mit unveränderten Eigenschaften fort. Der elektrodynamische Einfluss der Materie besteht nur darin, dass ihre Theilchen zu gewissen Erregungen Anlass geben. — Ein jedes Theilchen erscheint dabei völlig selbstständig, d. h. seine Erregung und deren Fortpflanzung erfolgt gerade so, als ob es allein vorhanden wäre; die Gesammterregung des Feldes ergiebt sich als Superposition der Einzelerregungen.*

Nach diesen Ueberlegungen kommt auch im Innern der Materie die Bewegung eines jeden einzelnen Theilchens für sich allein in Betracht. Um das ohne weitgehende Komplikationen verständlich zu finden, bleibt nur übrig, anzunehmen, *dass eine besondere Substanz — der Aether — die ganze Welt um*

uns und auch das Innere der Materie ohne in Betracht kommende Lücken erfüllt, sich an den Bewegungen der sinnlich wahrnehmbaren Materie nicht merklich betheiligt und überall der eigentliche Träger der elektrodynamischen Felderregungen ist. Wie wir bei der Besprechung der Lorentz'schen Theorie schon gesehen haben, geben uns die optischen Erscheinungen innerhalb und in der Nähe bewegter materieller Körper das Recht, dieser Hypothese unser Vertrauen zu schenken. (Vergl. Art. 79).

93. *Elektricität.* Eine Schwierigkeit für diese Betrachtungsweise boten bis vor Kurzem der Austausch der molekularen Ladungen und die metallische Leitung, weil hier nicht ohne Weiteres eine Ueberführung der Elektricität durch Materie angenommen werden darf (vergl. Art. 80); sie ist jedoch seit 1896 durch Zeemann's Entdeckung des Einflusses des Magnetismus auf die Lichtemission und die von Lorentz gegebene Erklärung, sowie durch eine grosse Zahl von Arbeiten über elektrische Entladungen in Gasen vollständig beseitigt worden. Wie ich in dem citirten Vortrag vom 7. Januar 1897 „Ueber das Wesen der Elektricität" wohl zum ersten Male folgerte, dürfen wir jetzt mit Zuversicht annehmen, *dass es neben den Atomen, von denen die Chemie spricht, noch wenigstens eine andere Art giebt, deren Masse vielmals (nach den neueren Messungen 1000—2000 mal) geringer ist, als die der Wasserstoffatome, und die in den Metallen die Rolle der Ionen übernehmen*; es ist darum jetzt auch erlaubt, den von uns aus den elektrodynamischen Eigenschaften des Aethers abgeleiteten Satz, nach welchem die elektrische Ladung eines materiellen Körpers sich nicht ändern kann, so lange er ganz von freiem Aether umgeben ist, *zu der Hypothese zu erweitern, dass die Ladung eines jeden materiellen Theilchens ihm ein für alle Mal eigenthümlich ist, sich also niemals ändert.*

Die Elektricität scheint hiernach mit der atomistischen Konstitution der Materie fest verknüpft und bedeutet für ein einzelnes Theilchen ein Maass der elektrodynamischen Verkettung mit dem Aether.

Durch die vorstehenden Erwägungen sind wir vollständig zu den alten Vorstellungen der beiden elektrischen Fluida zurückgekehrt, von denen wir im zweiten Theile dieser Arbeit ausgingen. Nur haben die Elektricitäten jetzt atomistische Struktur erhalten und sind bis zu einem gewissen Grade zur Materie selbst geworden, an welche sie von vorne herein gebunden schienen.

Die Beobachtungen über die Einwirkung des Magnetismus auf die Lichtemission und über elektrische Entladungen in Gasen

nöthigen nur zu der Annahme, dass es ausser den Atomen der Chemie besondere leichtere *negativ* elektrische Atome giebt, und es könnte sein, dass entsprechende positive überhaupt fehlen, indem die positive Elektrisirung allein den Stammatomen der Chemie zukommt. Andererseits dürfen wir die Möglichkeit besonderer positiver Atome nicht abweisen; bis zur äussersten Grenze gehend könnte man sogar vermuthen, dass die sinnlich wahrnehmbare Materie vollständig aus den experimentell gefundenen besonderen negativen und entsprechenden positiven Atomen aufgebaut ist. Ein solches Bild, auf welches ich schon in meiner Arbeit vom 1. März 1894 hinwies, ist gewiss in mancher Hinsicht sehr verlockend, aber man muss wohl beachten, dass es rein hypothetisch ist. Wollen wir die Tragweite unserer Theorie nicht überschätzen, so muss sogar dem Zweifel Raum gegeben werden, ob denn wirklich das elektromagnetische Verhalten der Materie allein auf dem Vorhandensein der durch e gemessenen molekularen elektrischen Ladungen beruhe, wie wir bisher angenommen haben. Diese Hypothese genügt ja freilich zur Erklärung der bekannten Erscheinungen und muss daher bei der Darlegung der Theorie der Elektrodynamik vorangestellt werden. Aber andererseits scheint es sehr wohl möglich, dass die „elektrische Ladung“ für die Verkettung der Materie mit dem elektromagnetischen Felde nur einen ausgezeichneten Fall darstellt, neben dem auch andere Beziehungen stattfinden.

Bei der dielektrischen Polarisation z. B. kommt diese komplicirtere Verkettung vielleicht zur Geltung, sodass die Aenderung der Polarisation nicht nur Verschiebungen elektrisch geladener Theilchen bedeutet, sondern auch Deformationen der Atome von komplicirterer Art. — Ebenso ist die Magnetisirung vielleicht nicht nur die Folge gewisser Bewegungen elektrischer Theilchen, sondern in vielen Fällen auch die Folge einer direkten magnetischen Wechselwirkung zwischen Feld und Materie, die nicht an bestimmte Bewegungen der Materie gebunden ist.

Werden derartige Komplikationen ins Auge gefasst, so muss auch mit der Möglichkeit gerechnet werden, dass die speciellen negativ elektrischen Atome nur eine ausgezeichnete Art der Materie darstellen, deren Bau und deren Verkettung mit dem elektromagnetischen Felde besonders einfach ist, und neben der es noch eine ganze Reihe komplicirterer Arten giebt.

94. *Ponderomotorische Kräfte.* Ebenso wie es für die Berück-

sichtigung des Einflusses der Materie auf die elektrodynamische Erregung des Aethers hinreichend scheint, auf die Elektrisirung der Atome und ihre Bewegungen zu achten, genügt es auch umgekehrt für die Berücksichtigung des Einflusses der elektrodynamischen Erregung des Aethers auf die Materie, allein auf die bewegenden Kräfte zu achten, welche sich an die Elektrisirung der Atome knüpfen. Da wir den Aether als ruhend betrachten, gelangen wir dann genau zu dem System der ponderomotorischen Kräfte, welches von H. A. Lorentz (Art. 83) aufgestellt wurde; *d. h. es ist für jedes elektrisirte Atom mit der Ladung e eine der elektrischen und eine der magnetischen Felderregung entsprechende ponderomotorische Kraft anzunehmen, die erste mit der Intensität $e\mathsf{K}$ parallel zu K, die zweite mit der Intensität $e(v/V)\,\mathsf{H}\sin(v, \mathsf{H})$ senkrecht zu v und H in einer Richtung, welche sich aus derjenigen der zu H senkrechten Komponente von v durch Drehung um $\pi/2$ im Sinne von H ergiebt.*

Erinnern wir uns der Beobachtungsergebnisse, so folgt sogleich, dass die zur elektrischen Felderregung gehörige Kraft $e\mathsf{K}$ alle in § 3 und § 4 beschriebenen elektrostatischen Phänomene genau in der dort dargelegten Art erklärt. Auf Rechnung dieser Kraft kommt ferner die infolge der Veränderung des magnetischen Feldes inducirte elektrische Kraft (Art. 37), denn die ihr entsprechende elektromotorische Kraft in einer geschlossenen Kurve wird durch die zweite verkettende Feldgleichung unmittelbar in der Faraday'schen Form angegeben:

$$E = \int d\lambda\, \mathsf{K}_\lambda = \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\int d\sigma\, H_\nu. \text{ —}$$

Die zur magnetischen Felderregung gehörige Kraft

$$e\frac{v}{V}\,\mathsf{H}\sin(v, \mathsf{H})$$

ergiebt sofort das Komplement des Biot-Savart'schen Gesetzes und im Anschluss daran alle Fernwirkungen in Systemen von Strömen und Magneten, von denen in § 5 und § 6 die Rede war. Sie giebt ferner die durch Bewegung im Felde der magnetischen Kraft inducirte elektrische Kraft, und zwar, wie leicht zu übersehen ist, als direkte Folge der Bewegung der Materie an der betreffenden Stelle selbst. Wir erhalten diese inducirte Kraft also jetzt in einer der Erfahrung unmittelbar entsprechenden Weise, und nicht als ein komplicirtes Rechnungsresultat wie durch die Theorien von v. Helmholtz und Hertz (Art. 54 und 76).

Man wird bemerken, dass die Theorie die direkten Ergebnisse der Erfahrung auch insofern getreu wiederspiegelt, als sie

die durch Bewegung im Felde inducirte elektrische Kraft selbst kennen lehrt, für die durch Feldveränderung inducirte elektrische Kraft aber zunächst nur das Linienintegral über geschlossene Kurven angiebt.

95. *Elektrodynamische Energie.* Auch für die elektrodynamische Energie, ihre Bewegung und ihren Austausch ist unmittelbar die bei der Lorentz'schen Theorie gegebene Darstellung zu übernehmen (Art. 84). — In Bezug auf die Poynting'sche Energieströmung mag hervorgehoben werden, dass wir nun den Grund erkennen, warum derjenige Antheil an der elektrischen Kraft, welcher durch Bewegung der Materie im Felde inducirt wird, von Poynting bei der Feststellung der Energieströmung ausgeschaltet werden musste; er hat eben keine direkte Bedeutung für den Aether. —

Zu der elektrodynamischen Energie

$$\mathsf{E} = \int d\omega \frac{1}{8\pi}(\mathsf{K}^2 + \mathsf{H}^2)$$

des Aethers, welche uns die Rechnung von Lorentz in Art. 84 zunächst ergiebt, ist in dielektrischen Medien noch eine elektrodynamische Energie hinzuzunehmen, welche zu der dielektrischen Verschiebung in der Materie gehört; in magnetisirten Medien kann man in manchen Fällen auch eine entsprechende magnetische Energie der Materie voraussetzen, wenn die Molekularmagneten als etwas Selbstständiges behandelt werden. Im einfachsten Falle, wo dielektrische Polarisation und Magnetisirung von der elektrischen Kraft und der magnetischen Kraft linear abhängig gesetzt werden dürfen, erhalten wir entsprechend den Artikeln 17 und 40 für die gesammte elektrodynamische Energie die Formel:

$$\mathsf{E} = \int d\omega \left(\frac{1}{8\pi}\mathsf{K}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathsf{H}^2\right) + \int d\omega \left(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\mathsf{K}\cos(\varepsilon,\mathsf{K}) + \tfrac{1}{2}\,\mu\,\mathsf{H}\cos(\mu,\mathsf{H})\right),$$

wobei sich das erste Integral auf die Energie des Aethers, das zweite auf die der Materie bezieht. Wir kommen also dann zu den Annahmen der Maxwell'schen Theorie (vergl. Art. 65), aber mit einer Aenderung des Standpunktes, welche einen Anschluss an die im zweiten Theile der Arbeit dargelegten Vorstellungen bedeutet.

Sehr interessant ist es noch, zu beachten, was die Sätze über den Austausch der elektrodynamischen Energie, welche wir in Art. 39 und 40 aus der Erfahrung folgerten, in unserer Theorie bedeuten. Es ergab sich in Art. 40, dass bei der Be-

wegung der Materie im Felde, die Arbeit der dadurch inducirten elektrischen Kräfte und der ponderomotorischen Kräfte sich in jedem einzelnen Volumtheil gerade zu kompensiren scheinen. Wir erkennen jetzt, dass dieses in der That der Fall ist, und sich erklärt, weil beide Wirkungen zusammengenommen, gerade den vollständigen Einfluss der zur magnetischen Felderregung gehörigen ponderomotorischen Kraft $e(v/V)\mathsf{H}\sin(v,\mathsf{H})$ darstellen; *die völlige Kompensation ist ein direktes Anzeichen dafür, dass die Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung v steht.* — Es ergab sich ferner, dass der Austausch der elektrodynamischen Energie allein durch diejenigen inducirten elektrischen Kräfte zu erfolgen scheint, welche durch Veränderung des Feldes erregt werden, und wir erkennen jetzt, dass dieses zutrifft, weil nur die ponderomotorische Kraft $e\mathsf{K}$ den Austausch vermittelt. —

96. *Intensität der zur magnetischen Felderregung gehörigen ponderomotorischen Kraft.* Da die zur magnetischen Felderregung gehörige ponderomotorische Kraft sich an dem Austausch der elektrodynamischen Energie des Aethers nicht betheiligt, lässt die Theorie für ihre Intensität einen Proportionalitätsfaktor zunächst unbestimmt. Denkt man sich nämlich die Einheit der magnetischen Kraft durch die Energieformel:

$$\mathsf{E} = \int d\omega \left(\frac{1}{8\pi} \mathsf{K}^2 + \frac{1}{8\pi} \mathsf{H}^2 \right)$$

festgesetzt, und schreibt für die Intensität der Kraft

$$\varkappa e \frac{v}{V} \mathsf{H} \sin(v, \mathsf{H}),$$

so könnte $\varkappa$ einen beliebigen Werth haben, ohne das ein Widerspruch innerhalb der Theorie entstände. Wohl aber würden natürlich Widersprüche mit der Erfahrung eintreten, wenn wir $\varkappa$ nicht $= 1$ setzten; als Verhältniss der beiden Elektricitätseinheiten ergäbe sich nicht mehr die Lichtgeschwindigkeit, und es müssten auch dann inducirte elektromotorische Kräfte in zwei Stromringen gefolgert werden, wenn diese sich ohne relative Verschiebung und ohne Drehung mit gleichmässiger Geschwindigkeit geradlinig bewegen.

Unter solchen Umständen entsteht die Frage, ob nicht auch die Theorie bei weiterer Ausführung einen Grund finden lässt, warum $\varkappa$ gerade $= 1$ ist, und die in Art. 48 mitgetheilten Rechnungen von Maxwell unter Benutzung der allgemeinen Mechanik zeigen, dass die Frage bejaht werden kann: Es ist nur

nöthig mit Maxwell anzunehmen, dass

$$\frac{1}{8\pi}\int d\omega\, \mathsf{H}^2$$

die *kinetische Energie des Systems* bedeutet, dann ergeben seine Rechnungen aus der Energieformel die ponderomotorischen Kräfte entsprechend $\varkappa = 1$, und lassen daher diesen Werth als Folge der mechanischen Verkettung des Systemes erscheinen.

§ 14. Schlussbemerkungen.

97. *Weitere Ausführung der Theorie.* Wenn wir unseren Standpunkt mit dem von Maxwell vergleichen, so ergiebt sich vielleicht als wesentlichste Veränderung, dass zwischen Aether und Materie unterschieden wird. Dadurch wird es möglich, die Eigenart der Materie, welche in ihrer atomistischen Konstitution begründet ist und alle die Komplikationen der Theorie für materielle Körper verursacht, in Schärfe zur Geltung zu bringen. Ein Beispiel wird dies deutlich machen. Hertz nimmt für homogene isotrope Medien im Anschluss an Maxwell an, dass in den Gleichungen:

$$\frac{d^*K}{dt} + 4\pi\gamma \cong -V \operatorname{Quirl} \mathsf{H}, \qquad \frac{d^*H}{dt} \cong V \operatorname{Quirl} \mathsf{K},$$

$$K \cong k\mathsf{K} \cong \mathsf{K} + 4\pi\varepsilon \cong \mathsf{K} + 4\pi h \mathsf{K}, \quad H \cong p\mathsf{H} \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu \cong \mathsf{H} + 4\pi s \mathsf{H},$$

$$\gamma \cong c\mathsf{K},$$

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\,(k\mathsf{K}^2 + p\mathsf{H}^2) = \frac{1}{8\pi}\int d\omega\,(\mathsf{K}^2+\mathsf{H}^2) + \tfrac{1}{2}\int d\omega \left(\frac{\varepsilon^2}{h} + \frac{\mu^2}{s}\right)$$

die Faktoren h, k, s, p, c Konstanten sind. Für uns aber werden sie im Allgemeinen zu unbestimmten Zahlen, weil ε, μ und γ den geweiligen elektrodynamischen Zustand der Materie beschreiben, und dieser, als Gesammtresultat der vom Aether ausgeübten ponderomotorischen Kräfte und der Wechselwirkung der Atome unter sich, nur ausnahmsweise einfachen Beziehungen genügen wird.

So zeigt denn die Theorie in ihrer neuen Gestalt sogleich, wo wir einzusetzen haben, um den Komplikationen der Elektrodynamik in materiellen Körpern gerecht zu werden, und giebt in ihren Gesetzen über die ponderomotorischen Kräfte eine sehr bequeme Richtschnur.

Es ist im hohen Grade bemerkenswerth, dass W. Voigt in Arbeiten, welche eine Erweiterung der Hertz-Heaviside'schen Gleichungen für die Lichtbewegungen *ohne direkte Rücksicht auf die molekulare Konstitution* bezwecken und einen Weg einschlagen,

dessen Anfangsrichtung durch H. Hertz angegeben wurde, gerade zu Formeln geführt wird, die unserer Theorie entsprechen. Er geht von einem Gleichungssystem aus, das von P. Drude[1]) unter Benutzung des Hertz'schen Gedankens zunächst zur Erklärung von Dispersion und Absorption abgeleitet wurde. Sein Ziel war, die Formeln so zu vervollständigen, dass sie auch die Einwirkung des Magnetismus auf die Lichtbewegungen zu erklären vermögen. Es ergiebt sich ausser der Darstellung von Absorption und Emission nun weiter eine Darstellung der von Faraday entdeckten magnetischen Drehung der Polarisationsebene, des inversen Zeemann-Phänomens, der sich anknüpfenden von Macaluso und Corbino entdeckten Erscheinung und eines Phänomens, das W. Voigt selbst im Anschluss an seine theoretischen Arbeiten entdeckte. Der Gültigkeitsbereich der Formeln ist also ausserordentlich gross. — Für nichtleitende Körper haben wir zu setzen[2]):

$$K_x = \mathsf{K}_x + \sum K_x^{(h)},$$

$$K_x^{(h)} + a^{(h)} \frac{\partial K_x^{(h)}}{\partial t} + b^{(h)} \frac{\partial^2 K_x^{(h)}}{\partial t^2} + c^{(h)} \left(\mathsf{H}_z \frac{\partial K_y^{(h)}}{\partial t} - \mathsf{H}_y \frac{\partial K_z^{(h)}}{\partial t} \right) = e^{(h)} \mathsf{K}_x$$

und für die übrigen Koordinatenrichtungen die analogen Gleichungen anzunehmen. Die $K^{(h)}$ bedeuten dabei gewisse Vektoren, welche den Zustand des Medium beschreiben, die $a^{(h)}$, $b^{(h)}$, $c^{(h)}$, $e^{(h)}$ Konstanten. Im übrigen sind die Hertz-Heaviside'schen Gleichungen:

$$\frac{d^a K}{dt} \cong -V \mathrm{Quirl}\, \mathsf{H}, \quad \frac{d^a H}{dt} \cong V \mathrm{Quirl}\, \mathsf{K}$$

unverändert beizubehalten. — Betrachten wir das Formelsystem von unserem Standpunkt, so zeigt sich deutlich die Trennung der Zustandsänderungen von Aether und Materie, und wir erkennen die von uns angenommene Wechselwirkung zwischen beiden. — In einer weiteren Arbeit von W. Voigt, welche demnächst in Wiedemann's Annalen erscheinen wird und eine Erklärung der komplicirteren Formen des Zeemann-Phänomens mittheilt, wird für die elektrodynamische Energie in unserer Bezeichnungsweise die Gleichung

$$\mathsf{E} = \frac{1}{8\pi} \int d\omega (\mathsf{K}^2 + \mathsf{H}^2) + \frac{1}{2} \int d\omega \sum \frac{1}{4\pi e^{(h)}} \left((K^{(h)})^2 + b^{(h)} \left(\frac{d^a K^{(h)}}{dt} \right)^2 \right).$$

gefunden, welche ebenfalls genau die nach unserer Theorie zu erwartende Form hat.

1) Wied. Ann. 48, p. 536, 1893.
2) Wied. Ann. 67, p. 345, 1899.

98. *Vergleich mit den älteren Theorien der Elektrodynamik.* Als eigentlicher Träger der elektrodynamischen Erscheinungen gilt nach der neuen Theorie der Aether, der überall mit gleichen Eigenschaften angenommen und als ruhend angesehen wird. In ihm bewegen sich die Atome der sinnlich wahrnehmbaren Materie, von denen wenigstens ein Theil vermöge der „Elektrisirung“ mit dem Aether elektrodynamisch verkettet ist, Ein jedes der elektrischen Atome stellt genau ein *„Theilchen von Elektricität“* im Sinne der älteren Theorien dar; allerdings ist es nicht *imponderabel* sondern *materiell*, aber dieser Unterschied kommt für die Elektrodynamik im engeren Sinne nicht zur Geltung.

Jedes Theilchen erscheint in seiner Wechselwirkung mit dem Aether völlig selbstständig, indem die wirkliche Erregung des Aethers jederzeit als die Superposition der Erregungen aufgefasst werden kann, welche die einzelnen Theilchen für sich ergeben würden, und indem die Einwirkung, welche ein Theilchen seinerseits erfährt, ausser mit der Erregung des Aethers in seinem Bereich nur mit der eigenen Bewegung variirt. — Weiter lässt sich leicht zeigen, dass die gesammte Kraft, welche der Aether auf ein Theilchen gemäss den von uns (in Art. 83 und 94) angenommenen Gesetzen ausübt, die Resultante der Einzelkräfte darstellt, welche sich für die *Einzelerregungen* des Aethers ergeben, wenn man die *wirkliche Erregung* in irgend einer Weise als Superposition von solchen auffasst; beachtet man auch dieses, *so folgt, dass die elektrodynamischen Erscheinungen ganz allgemein als Superposition von Wechselwirkungen zwischen elektrischen Theilchen angesehen werden können, welche für jedes Paar so stattfinden, als ob es allein vorhanden wäre.*

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Maxwell'sche Theorie in unserer weiteren Ausführung schliesslich genau zu dem Prinzip der Selbstständigkeit der einzelnen elektrischen Theilchen und ihrer Wechselwirkung führt, welches die älteren allgemeinen Theorien der Elektrodynamik und voran diejenige von W. Weber benutzten. Insofern also kehren wir in allen Einzelheiten wieder zu diesen zurück.

Weiterhin trennen sich dann freilich die Wege. W. Weber nahm bei der Aufstellung seines berühmten Grundgesetzes:

$$F = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2V^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{V^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right\},$$

an, dass die Wechselwirkung je zweier elektrischer Theilchen durch ihre augenblickliche Lage und Bewegung bestimmt sei.

Damit wird auf eine nähere Untersuchung der Vermittlung der Fernwirkungen verzichtet. Weber's Nachfolger blieben meist auf demselben Standpunkt; und wenn sie eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit annahmen — wie C. Neumann[1]), der dadurch zu einer interessanten Begründung des Weber'schen Gesetzes geführt wurde —, gelang es doch noch nicht, die Vorgänge im Zwischenmedium deutlich zur Geltung zu bringen. So blieb denn gerade derjenige Theil des Problemes im Wesentlichen unbearbeitet, von dem einst Gauss in einem Briefe[2]) an Weber erklärt hatte, dass in ihm die Lösung zu suchen sei. Er schrieb (1845) in Bezug auf seine elektrodynamischen Arbeiten: „Ich würde ohne Zweifel meine Untersuchungen längst bekannt gemacht haben, hätte nicht zur Zeit, wo ich sie abbrach, das gefehlt, was ich wie den eigentlichen Schlussstein betrachtet hatte

Nil actum reputans si quid superesset agendum

nämlich *die Ableitung* der Zusatzkräfte (die zu der gegenseitigen Wirkung ruhender Elektricitätstheile noch hinzukommen, wenn sie in gegenseitiger Bewegung sind) *aus der nicht instantaneen*, sondern (auf ähnliche Weise wie beim Licht) in der Zeit sich fortpflanzenden Wirkung. Mir hatte dies damals nicht gelingen wollen; ich verliess aber, so viel ich mich erinnere, die Untersuchung damals doch nicht ganz ohne Hoffnung, dass dies später vielleicht gelingen könnte, obwohl — erinnere ich mich recht — mit der subjektiven Ueberzeugung, dass es vorher nöthig sei, sich von der Art, *wie* die Fortpflanzung geschieht, eine konstruirbare Vorstellung zu machen". Dass wir diese und damit eine befriedigende Lösung des Problems heute besitzen, verdanken wir Maxwell.

---

1) Prinzipien der Elektrodynamik, Tübingen 1868, Gratulationsschrift für die Univ. Bonn; Math. Ann. 1, p. 317, 1869.

2) Gauss, Werke, V, 1877, p. 627.

Bezeichnungen.

v Geschwindigkeit, V Lichtgeschwindigkeit im freien Aether oder Verhältniss der beiden elektrodynamischen Masseinheiten für die Elektricitätsmenge.

Λ Linie, $d\lambda$ oder ds Linienelement.

Σ Fläche, $d\sigma$ Flächenelement, η Flächendichte.

Ω Raum, $d\omega$ Raumelement, χ Raumdichte.

Axiar: Gerichtete Grösse.

Polarer Vektor oder *Vektor* kurzweg: Inbegriff von Intensität, Axe und Gleitrichtung längs dieser.

Rotationaler Vektor oder *Rotor*: Inbegriff von Intensität, Axe und Drehrichtung um diese.

$\cong$ bedeutet von Vektoren „gleich und gleichgerichtet"; in Gleichungen, welche dieses Zeichen führen, sind die Glieder als Vektoren aufzufassen und nach den Vektorgesetzen zusammenzufügen.

$\frac{d^a A}{dt}$, zu lesen: „*axiar dA nach dt*", oder „*Schwellung A*" ist der „*axiare Differentialquotient des Vektors A nach der Zeit*" und bedeutet denjenigen Vektor A', welcher mit A durch die für jede Richtung geltende Gleichung

$$A'_\nu = \frac{dA_\nu}{dt}$$

verbunden ist.

$\int d\lambda A_\lambda, \int^{\circ} d\lambda A_\lambda, \overline{\int} d\lambda A_\lambda$ sind die Linienintegrale von A für eine beliebige, eine geschlossene und eine Rand-Linie.

$\int d\sigma A_\nu, \int^{\circ} d\sigma A_\nu, \overline{\int} d\sigma A_\nu$ bedeuten die entsprechenden Flächenintegrale von A; für das Oberflächenintegral $\overline{\int} d\sigma A_\nu$ ist dabei stets die nach *aussen* weisende Normalenrichtung zu wählen.

Div A bezeichnet die „*Divergenz*" des Vektors A; diese ist definirt durch die für unendlich klein werdende Räume geltende Gleichung:

$$\mathrm{Div}\, A = \lim \frac{\overline{\int} d\sigma\, A_\nu}{\int d\omega}.$$

Für rechtwinklige Koordinaten gilt:

$$\mathrm{Div}\, A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

allgemein ist:

$$\overline{\int} d\sigma\, A_\nu = \int d\omega\, \mathrm{Div}\, A.$$

Quirl A bezeichnet den „*Quirl*" des Vektors A; dieser ist definirt durch die für jede Richtung ν und für unendlich klein werdende ebene Flächenstücke geltende Gleichung:

$$\mathrm{Quirl}_\nu A = \lim \frac{\overline{\int} A_\lambda\, d\lambda}{\int d\sigma},$$

wobei die Flächenstücke zu ν normal zu richten sind.

Für rechtwinklige Koordinaten ist:

$$\mathrm{Quirl}_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \mathrm{Quirl}_y A = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\mathrm{Quirl}_z A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y};$$

allgemein gilt (nach Stokes)

$$\overline{\int} d\lambda\, A_\lambda = \int d\sigma \mathrm{Quirl}_\nu A.$$

Δa bedeutet den Laplace'schen Differentialausdruck für den Skalar a; bezogen auf rechtwinklige Koordinaten ist:

$$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

---

e Elektricitätsmenge, i elektrischer Strom, γ räumliche elektrische Strömung, Γ Vektorpotential (Art. 13 und 23).

K elektrische Kraft, ε dielektrische Verschiebung = dielektrische Polarisation, $K \cong \mathsf{K} + 4\pi\varepsilon$ dielektrische Induktion (Art. 16).

m Menge von Magnetismus.

H magnetische Kraft = magnetisirende Kraft; μ Magnetisirung; $H \cong \mathsf{H} + 4\pi\mu$ magnetische Induktion = inducirende magnetische Kraft (Art. 33).
h Konstante der dielektrischen Polarisation, k Dielektricitätskonstante. ($\varepsilon \cong h\mathsf{K}$, $K \cong k\mathsf{K}$, $k = 1 + 4\pi h$).
s magnetische Susceptibilität, p magnetische Permeabilität.
($\mu \cong s\mathsf{H}$, $H \cong p\mathsf{H}$, $p = 1 + 4\pi s$).
c galvanische Leitfähigkeit. ($\gamma^{(\varphi)} \cong c\mathsf{K}$).

Zusatz.

Herrn Geh. Rath Prof. Dr. E. Riecke verdanke ich die interessante Bemerkung, dass schon W. Weber eine Masse der elektrischen Theilchen annahm und ihre experimentelle Bestimmung, wenn auch ohne positiven Erfolg, versuchte. Vergl. W. Weber, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl., Bd. 6, Leipz. 1864, p. 571; Werke, Bd. IV, p. 107.

Berichtigungen.

Es ist zu setzen:
S. 6, letzte Formel: E statt E;
S. 19, 2. und 3. Formel: ν statt λ;
S. 26, 1. Formel des Art. 23: ν statt μ;
S. 35: i/V und γ/V statt i und γ;
S. 39, 1. Formel: $\int d\sigma H_\nu$ statt $\int ds H_\nu$;
S. 43 oben: $-\frac{\alpha^2}{V^2} ds \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt}(ri\cos(r, ds))$ und $+\frac{\alpha^2}{V^2} ds \frac{1}{r^2}\, i\, \frac{dr}{dt}$;
S. 55 u. 56, Art. 46: τ statt S;
S. 57, vorletzte Formel: $T = \frac{1}{2} i_1^2 L + i_1 i_2 M + \frac{1}{2} i_2^2 N$;
S. 60, 2. Formel: $V^2 \Delta \mathfrak{A}_\nu$ statt $V^2 \mathfrak{A}_\nu$;
S. 91, 2. Formel, S. 93, 1. Formel: sin statt cos.
S. 94—95: Δ statt $\varDelta$.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

